Gara AIRO 2009-2010
Soluzioni degli esercizi della fase finale

1 Il semaforo

Il problema richiede anzitutto di rappresentare il funzionamento del semaforo tramite un grafo, in cui ogni nodo corrisponde ad un possibile *stato* del sistema ed ogni arco corrisponde ad una possibile *transizione di stato*. In ogni stato indichiamo con due lettere scelte tra "R", "G" e "V", il colore del semaforo nelle due direzioni: la prima lettera corrisponde a viale Cardo e la seconda a corso Decumano. Gli stati sono quattro se si esclude l'attraversamento pedonale. Il quinto stato, in cui entrambi i semafori per i veicoli sono rossi, va inserito come descritto dal testo tra lo stato "GR" e lo stato "RV". Le transizioni di stato descrivono un circuito, con una sola possibile biforcazione in uscita dallo stato "GR" a seconda che sia avvenuta una prenotazione per l'attraversamento pedonale o no. Il grafo risultante è raffigurato in Fig. 1.

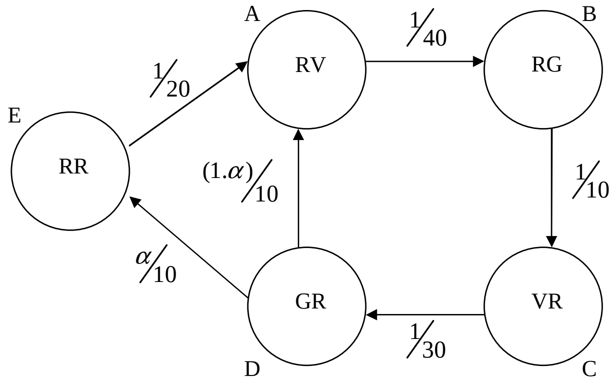

Figura 1: Grafo degli stati e delle transizioni.

Le frequenze di transizione indicate in figura sono date semplicemente dall'inverso dei periodi indicati nel testo. La frequenza delle chiamate pedonali è indicata da un parametro α, il cui valore è compreso tra gli estremi $\alpha = 0$, che corrisponde alla situazione in cui non ci sono mai chiamate pedonali, e $\alpha = 1$, che corrisponde alla situazione in cui c'è sempre una chiamata pedonale ad ogni ciclo. Le frequenza in uscita dallo stato "GR" dipendono quindi da α, mentre le altre sono fisse.

Una volta definiti il grafo e i pesi associati alle transizioni, è possibile calcolare le frazioni di tempo durante le quali il sistema si trova in ciascuno degli stati possibili. A questo scopo si può impostare un sistema di 5 equazioni di bilanciamento tra la frequenza media di ingresso e la frequenza media di uscita da ciascuno stato (bastano quattro equazioni, perché la quinta è linearmente dipendente dalle altre).

Il sistema risulta dato da:

$$P_A \frac{1}{40} = P_E \frac{1}{20} + P_D \frac{1-\alpha}{10}$$

$$P_B \frac{1}{10} = P_A \frac{1}{40}$$

$$P_C \frac{1}{30} = P_B \frac{1}{10}$$

$$P_D \frac{1}{10} = P_c \frac{1}{30}$$

$$P_E \frac{1}{20} = P_D \frac{\alpha}{10}$$

A queste equazioni va aggiunta l'equazione di normalizzazione delle frazioni, il cui totale deve corrispondere al 100% del tempo:

$$P_A + P_B + P_C + P_D + P_E = 1.$$

Il problema ha quindi 5 incognite e 5 vincoli di uguaglianza (uno dei primi cinque infatti è ridondante): lo si può risolvere facilmente sia a mano che con un solutore software.

Il modello Excel è nel file "1 - Semaforo.xls".

Domanda 1. Le frazioni di tempo per i 5 stati risultano essere le seguenti quando $\alpha = 0$:

- $P_A = \frac{4}{9}$
- $P_B = \frac{1}{9}$
- $P_C = \frac{3}{9}$
- $P_D = \frac{1}{9}$
- $P_E = 0$.

Domanda 2. Le frazioni di tempo per i 5 stati risultano essere le seguenti quando $\alpha = 1$:

- $P_A = \frac{4}{11}$
- $P_B = \frac{1}{11}$
- $P_C = \frac{3}{11}$
- $P_D = \frac{1}{11}$
- $P_E = \frac{2}{11}$.

Domanda 3. In questo terzo caso α è una variabile ed è anche la funzione obiettivo da massimizzare, mentre si introduce un vincolo in più: la frazione di tempo disponibile per il transito su viale Decumano è data dalla somma delle frazioni di tempo relative agli stati in cui la seconda lettera è "V" o "G", ossia gli stati indicati in figura con le lettere A e B. Pertanto il vincolo è

$$P_A + P_B \geq 0,5.$$

La soluzione ottima si ha con $\alpha = 0,5$, valore per il quale il vincolo è soddisfatto con il segno di uguaglianza (vincolo "attivo").

Commenti. Questo esercizio richiede di applicare alcune nozioni di base sui sistemi lineari allo studio di un semplice sistema dinamico la cui evoluzione è rappresentabile come una *catene di Markov*, dove peraltro non ci sono probabilità bensì frequenze associate agli stati, poiché il sistema studiato è deterministico. L'esercizio in abbinamento con altri dello stesso tipo ma relativi a sistemi non-deterministici (ad es. l'esercizio "Pronto Soccorso") si presta quindi a considerazioni su analogie e differenze tra i concetti di *probabilità* e di *frequenza.*

2 Il tappeto

Il modello matematico di questo problema si può formulare come segue.

Dati.

- un insieme $\mathcal{N}$ di punti che rappresentano i graffi;
- due vettori, indicati da x e y, che contengono i valori di ascissa e ordinata per ciascun punto.

Variabili. Il problema richiede di localizzare un rettangolo, che è definito da quattro rette nel piano (cioè da 12 coefficienti) oppure da quattro vertici (cioè 8 coordinate cartesiane). Nel seguito ci si riferisce alla scelta di usare come variabili i coefficienti delle equazioni delle rette cui appartengono i lati.

Vincoli. I vincoli del problema impongono che:

- le rette siano a due a due parallele tra loro: $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $a_3 = a_4$, $b_3 = b_4$;
- le coppie di rette parallele siano tra loro perpendicolari: $a_1 * a_3 + b_1 * b_3 = 0$;
- i coefficienti delle rette siano normalizzati: $a_1^2 + b_1^2 = 1$, $a_3^2 + b_3^2 = 1$;
- tutti i punti cadano dalla stessa parte rispetto a ciascuna delle rette e da parti opposte rispetto alle due rette parallele in ogni coppia, cioè che valga per ogni $i \in \mathcal{N}$: $a_1 x_i + b_1 y_i + c_1 \leq 0$; $a_2 x_i + b_2 y_i + c_2 \geq 0$; $a_3 x_i + b_3 y_i + c_3 \leq 0$; $a_4 x_i + b_4 y_i + c_4 \geq 0$;
- i lati del rettangolo siano pari alla distanza tra le rette parallele in ogni coppia: $l_1 = c_2 - c_1$, $l_2 = c_4 - c_3$.

Obiettivo. L'obiettivo è semplicemente quello di minimizzare l'area A del tappeto, cioè il prodotto dei due lati: $\min A = l_1 * l_2$.

Il problema è non-lineare con variabili continue. E' importante ricordare che i valori dei coefficiennti a, b e c che identificano le rette possono essere sia positivi che negativi: le variabili sono "libere".

Domande 1 e 2. La soluzione ottima è riportata nel file Excel "2 - Tappeto.xls". L'area minima del tappeto risulta essere pari a 96 decimetri quadrati.

Commenti. Questo esercizio richiede di usare i concetti di semipiano e di ortogonalità e parallelismo tra rette. Inoltre illustra come sia possibile affrontare la risoluzione con diverse scelte delle variabili decisionali (i dodici coefficienti delle quattro rette dei lati oppure le otto coordinate dei quattro vertici).

3 La squadra di calcio

Il modello matematico della prima parte del problema si può formulare come segue.

Dati (1). I dati del problema sono:

- un insieme $\mathcal{R}$ di ruoli;
- un insieme $\mathcal{N}_r$ di calciatori per ogni ruolo $r \in \mathcal{R}$;
- un indice di performance v_i per ogni calciatore $i \in \mathcal{N}$, dove $\mathcal{N} = \bigcup_{r \in \mathcal{R}} \mathcal{N}_r$;
- un numero minimo k_r di calciatori per ogni ruolo $r \in \mathcal{R}$;
- un numero massimo k di calciatori;

Variabili. Il problema richiede di selezionare alcuni calciatori Le variabili decisionali del problema sono quindi binarie e sono tante quante i calciatori. Indichiamo con x_i la variabile binaria che indica se il calciatore $i \in \mathcal{N}$ è selezionato o no.

Funzione obiettivo (1). La funzione obiettivo da massimizzare è la somma degli indice di prestazione dei calciatori selezionati:

$$\text{maximize} \sum_{i \in \mathcal{N}} v_i x_i.$$

Vincoli. I vincoli impongono che:

- il numero di calciatori in ogni ruolo sia almeno pari al minimo richiesto:
$$\sum_{i \in \mathcal{N}_r} x_i \geq k_r \quad \forall r \in \mathcal{R};$$
- il numero complessivo di giocatori sia non superiore al limite massimo consentito:
$$\sum_{i \in \mathcal{N}} x_i \leq k.$$

Il modello risultante è lineare con variabili binarie ed è riportato nel primo foglio del file Excel "3 - Squadra di calcio.xls".

Domanda 1. La soluzione ottima consiste nella scelta dei calciatori 2, 3 (difensori), 5, 6, 7, 8 (centrocampisti), 10, 12, 13 e 16 (attaccanti) per un valore complessivo di 81.

Nella seconda parte dell'esercizio il modello viene modificato come segue.

Dati (2). E' data in questo caso una matrice di coefficienti di compatibilità c_{ij} $\forall i \in \mathcal{N}, j \in \mathcal{N}$.

Obiettivo (2). Mantenendo la stessa scelta delle variabili fatta in precedenza e gli stessi vincoli del caso precedente, il nuovo obiettivo si formula come:

$$\text{maximize} \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{j \in \mathcal{N}} c_{ij} x_i x_j$$

e risulta pertanto una funzione quadratica.

Il modello risultante quindi è di programmazione non-lineare con variabili binarie ed è riportato nel secondo foglio del file Excel.

Domanda 2. La soluzione ottima in questo secondo caso consiste nella scelta dei calciatori 1, 2, 3 (difensori), 6, 7, 8 (centrocampisti), 9, 10, 11 e 12 (attaccanti) ed ha un valore complessivo pari a 233.

E' possibile anche dare una formulazione lineare del problema a patto di introdurre altre variabili. In particolare si può associare una variabile binaria y_{ij} ad ogni coppia di calciatori. Essa vale 1 se e solo se entrambi sono selezionati. In questo modo la funzione obiettivo diventa semplicemente

$$\text{maximize} \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{j \in \mathcal{N}} c_{ij} y_{ij}$$

che è lineare, ma occorre introdurre opportuni vincoli in modo da assicurare la coerenza tra i valori delle variabili x e y. Si vuole infatti che sia $y_{ij} = 1$ se e solo se $x_i = 1$ e anche $x_j = 1$. E' possibile esprimere questo legame con vincoli lineari in questo modo:

$$y_{ij} \geq x_i + x_j - 1$$

$$y_{ij} \leq x_i$$

$$y_{ij} \leq x_j$$

Il primo di questi tre gruppi di vincoli in realtà è ridontante, grazie alla non-negatività dei coefficienti e alla direzione della funzione obiettivo, non capita mai che sia conveniente porre y_{ij} a 0 quando entrambe x_i e x_j sono uguali a 1.

Commenti. Questo esercizio richiede l'uso di variabili binarie per rappresentare scelte di tipo binario e richiede di formulare un modello la cui funzione obiettivo, a parità di variabili usate, è lineare nella prima parte e quadratico nella seconda. Si presta a mostrare come la formulazione di problemi con variabili binarie non sia unica e in particolare lo stesso problema possa avere anche formulazioni lineari o quadratiche, corrette in entrambi casi, ma con caratteristiche diverse nei due casi, con vantaggi e svantaggi dal punto di vista della scrittura del modello e dal punto di vista del tempo di calcolo richiesto all'algoritmo risolutivo.

4 Il vulcano

Il problema si può formulare matematicamente come segue.

Dati. Sono dati:

- un insieme $\mathcal{T}$ di tipi di aeromobile (nel nostro caso 3 tipi);
- un costo f_t per ogni tipo di aeromobile $t \in \mathcal{T}$;
- una capacità q_t per ogni tipo di aeromobile $t \in \mathcal{T}$;
- un insieme $\mathcal{P}$ di categorie di passeggeri (nel nostro caso 4 categorie);
- un numero n_p per ogni categoria $p \in \mathcal{P}$;
- un costo r_p per ogni giorno di ritardo per i passeggeri di ogni categoria $p \in \mathcal{P}$;
- un costo t_p di trasferimento per i passeggeri di ogni categoria $p \in \mathcal{P}$.
- un insieme $\mathcal{G}$ di giorni disponibili (nel nostro caso 3 giorni).

Variabili decisionali. Ci sono diverse decisioni da prendere per definire il piano:

- quale aeromobile usare in ciascun giorno. Questa decisione può essere rappresentata da una variabile binaria y_{tg} per ogni possibile scelta del tipo $t \in \mathcal{T}$ di aeromobile in ogni giorno $g \in \mathcal{G}$;
- quanti passeggeri trasportare ogni giorno per ogni categoria. Questa decisione può essere rappresentata da una variabile intera x_{pg} per ogni categoria $p \in \mathcal{P}$ e ogni giorno $g \in \mathcal{G}$.

Vincoli.

- In ogni giorno si può fare al massimo un volo con un tipo di aeromobile:

$$\sum_{t \in \mathcal{T}} y_{tg} \leq 1 \quad \forall g \in \mathcal{G}$$

- In ogni giorno non è possibile trasportare più passeggeri della capacità dell'aeromobile usato:

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} x_{pg} \leq \sum_{t \in \mathcal{T}} q_t y_{tg} \quad \forall g \in \mathcal{G}.$$

Obiettivo. Si vuole minimizzare il costo totale che è dato dalla somma di tre voci di costo distinte:

- Il costo per l'uso dell'aeromobile

$$c_{uso} = \sum_{g \in \mathcal{G}} f_t y_{tg}$$

- Il costo per rimborsare i passeggeri trasportati in ritardo

$$c_{ritardo} = \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{g \in \mathcal{G}} (g-1) * r_p * x_{pg}$$

- Il costo per il trasferimento di passeggeri ad altre compagnie

$$c_{trasferimento} = \sum_{p \in \mathcal{P}} (t_p * (n_p - \sum_{g \in \mathcal{G}} x_{pg}))$$

E' importante osservare che il numero di passeggeri trasferiti, $(n_p - \sum_{g \in \mathcal{G}} x_{pg})$ non deve mai diventare negativo. Ciò va imposto come ulteriore vincolo nel modello, o inserendo esplicitamente le corrispondenti variabili non-negative.

Il modello risultante è lineare con variabili binarie e intere.

Domanda 1. La soluzione ottima, riportata nel primo foglio del file Excel "4 - Vulcano.xls", consiste nell'usare un aeromobile di tipo B il primo giorno e un aeromobile di tipo A il secondo e il terzo giorno, trasportando tutti i passeggeri, a partire dai più "costosi" in termini di indennizzo per il ritardo. La soluzione ottima ha un costo pari a 21200 Euro, di cui 12000 per il costo degli aerei e 9200 per i rimborsi per il ritardo.

Domanda 2. Se si introduce il vincolo $\sum_{t \in \mathcal{T}} yt3 = 0$ si impedisce il trasporto di passeggeri nel giorno $g = 3$. In tal caso la soluzione ottima consiste nell'usare un aeromobile di tipo C il primo giorno e uno di tipo B il secondo giorno, senza trasferire nessuno ad altre compagnie aeree. Il costo sale a 23860 Euro di cui 20000 Euro per gli aerei e 3860 per i ritardi.

Domanda 3. Inserendo semplicemente il vincolo $y_{31} = 0$ si proibisce l'uso dell'aeromobile di terzo tipo nel primo giorno. In tal caso la soluzione ottima richiede l'uso di un aeromobile di tipo B sia il primo che il secondo giorno e il trasferimento di 13 passeggeri di categoria 1 e 49 di categoria 3. Il costo sale a 26725 Euro di cui 10000 per gli aerei, 4650 per i ritardi e 12075 per i trasferimenti.

Commenti. L'esercizio richiede l'uso di variabili sia binarie sia intere.

5 Il triangolo

Il problema si può formulare matematicamente come segue.

Dati. Sono dati:

- un insieme di $\mathcal{R}$ rette (nel nostro caso tre);
- i coefficienti, a_i, b_i e c_i che definiscono l'equazione di ogni retta $i \in \mathcal{R}$.

Variabili. Si vuole localizzare un triangolo equilatero, definito dai suoi tre vertici P_i con $i \in \mathcal{R}$, in posizione (x_i, y_i). Abbiamo quindi 6 variabili continue e libere.

Vincoli.

- Ciascuno dei punti deve giacere su una delle rette:

$$a_i x_i + b_i y_i + c_i = 0.$$

- Il triangolo dev'essere equilatero:

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 = L^2 \quad \forall i, j \in \mathcal{R}, i \neq j$$

  dove L è il lato del triangolo e può convenientemente essere rappresentato da una variabile ausiliaria continua non-negativa.

Obiettivo. Si richiede di minimizzare il perimetro del triangolo, pari a $3L$.

Il modello risultante è quindi non-lineare, con variabili continue.

Domanda 1. La soluzione ottima richiede di collocare i tre vertici nei punti $(-0.25, 1.46)$, $(-5.70, -4.12)$ e $(-7.81, 3.40)$. Il perimetro risulta pari a 23.417.

6 Un appartamento a Manhattan

Il problema si può formulare matematicamente come segue.

Dati. Sono dati:

- un insieme $\mathcal{T}$ di tipi di siti (nel nostro caso, 4 tipi);
- un insieme di siti $\mathcal{S}_t$ per ciascun tipo $t \in \mathcal{T}$ (nel nostro caso 5 siti per ogni tipo);
- una coppia di coordinate (s_i, a_i) che indicano strada e avenue per ogni sito $i \in \mathcal{S}_t, \forall t \in \mathcal{T}$;
- le distanze tra strade, δ_s, e tra avenues, δ_a.

Variabili (1). Si vuole localizzare un appartamento presso un incrocio. Esso è quindi identificato da una coppia di coordinate $(\overline{s}, \overline{a})$. Tali coordinate sono variabili intere.

Vincoli (1). Il problema non ha vincoli: tutte le localizzazioni sono possibili.

Obiettivo (1). Nella prima parte dell'esercizio l'obiettivo è di minimizzare la somma delle distanza tra l'appartamento e i siti più vicini di ogni tipo. Ciò richiede di identificare quali sono i siti più vicini, uno per ogni tipo. A questo scopo è utile introdurre variabili binarie.

Variabili (2). Si associa ad ogni sito i una variabile binaria x_i che vale 1 se e solo se il sito è tra quelli più vicini.

Vincoli (2). Occorre quindi imporre che uno dei siti venga selezionato come più vicino tra quelli dello stesso tipo:

$$\sum_{i \in \mathcal{S}_t} x_i = 1 \quad \forall t \in \mathcal{T}.$$

Obiettivo (2). E' ora possibile scrivere l'obiettivo come

$$\text{minimize} \sum t \in \mathcal{T} \sum_{iin\mathcal{S}_t} x_i dist((s_i, a_i), ((\overline{s}, \overline{a}).$$

La distanza va calcolata con metrica "Manhattan" (appunto!) cioè sommando la distanza in verticale con la distanza in orizzontale, calcolate separatamente. Si ha quindi $dist((s_i, a_i), ((\overline{s}, \overline{a}) = \delta_s|s_i - \overline{s}| + \delta_a|a_i - \overline{a}|$. Per ottenere un modello lineare è necessario eliminare i valori assoluti.

Variabili (3). Introduciamo quindi altre variabili ausiliarie d_i^s e d_i^a che indicano le distanze misurate in strade e avenues tra l'appartamento ed il sito i.

Vincoli (3). Imponiamo poi per ogni sito i:

$$d_i^s \geq s_i - \overline{s}$$

$$d_i^s \geq \overline{s} - s_i$$

$$d_i^a \geq a_i - \overline{a}$$

$$d_i^a \geq \overline{a} - a_i$$

Obiettivo (3). L'obiettivo diviene quindi:

$$\text{minimize} \sum t \in \mathcal{T} \sum_{iin\mathcal{S}_t} x_i(d_i^s + d_i^a).$$

Il modello risultante è non-lineare con variabili binarie (x), variabili intere ($(\overline{s}, \overline{a})$) e variabili continue ($d^s$ e d^a).

Domanda 1. La soluzione ottima in questo primo caso consiste nel localizzare l'appartamento all'incrocio tra la 27^a o 28^a strada e una avenue compresa tra la 2^a e la 4^a, con un una distanza complessiva pari a 1,800 chilometri dai siti Supermercato 3, Ristorante 5, Cinema 1 e Banca 2. Ci sono quindi 6 soluzioni ottime distinte ed equivalenti.

Nella seconda parte dell'esercizio invece si chiede di considerare i due siti più vicini per ogni tipo e di minimizzare la distanza massima anziché la distanza totale.

Occorre quindi apportare al modello le seguenti modifiche.

Vincoli (4). Il numero di siti da considerare per ogni tipo passa da 1 a 2. Quindi:

$$\sum_{i\in\mathcal{S}_t} x_i = 2 \quad \forall t \in \mathcal{T}.$$

Obiettivo (4). L'obiettivo ora è una funzione "min-max":

$$\text{minimize} \max_{t\in\mathcal{T}, i\in\mathcal{S}_t} \{x_i(d_i^s + d_i^a)\}$$

che si può linearizzare scivendola come:

$$\text{minimize } z$$

con i vincoli

$$z \geq x_i(d_i^s + d_i^a) \forall t \in \mathcal{T}, i \in \mathcal{S}_t.$$

Domanda 2. La soluzione ottima in questo primo caso consiste nel localizzare l'appartamento all'incrocio tra la 27^a strada e la 3^a avenue, con un una distanza massima pari a 1,125 chilometri dal sito Banca 3. Anche in questo caso esistono diverse soluzioni ottime equivalenti.