

8. I VETTORI

DIVAGAZIONE. GLI ASSIOMI DELLA GEOMETRIA DEL PIANO

Definizione di vettore.

Somma di vettori.

Prodotto di un vettore per un numero.

COLLEGAMENTI: I VETTORI IN FISICA

Proiezioni.

Componenti di un vettore.

Operazioni sulle componenti.

La struttura di spazio vettoriale.

Prodotto scalare

COLLEGAMENTI: IL PRODOTTO SCALARE IN FISICA

Norma di un vettore.

DIVAGAZIONE. IL PRODOTTO VETTORIALE

DIVAGAZIONE. PROFILO STORICO

In matematica pochi concetti ricorrono così spesso, in ambiti differenti e con differenti notazioni, come quello di vettore.

Il concetto di **vettore** nasce tuttavia in fisica: mentre molte grandezze fisiche sono perfettamente descritte da un numero reale che ne esprime la misura rispetto ad una data unità (per esempio la massa, la temperatura, la frequenza), ve ne sono altre, per esempio la forza, la velocità, l'accelerazione, che non sono univocamente determinate se non si associa alla misura anche la direzione, il verso e il punto di applicazione.

Il primo a servirsi sistematicamente dei vettori è il grande matematico e fisico inglese Isaac Newton (1642–1727); è il primo a comprendere che in molti eventi fisici la natura si può interpretare in termini vettoriali. Nel primo *Corollario* alle leggi del moto enunciate nel suo libro più importante, *Principia mathematica philosophia naturalis*, del 1682, scrive:

"Un corpo spinto da due forze congiunte descriverà la diagonale di un parallelogrammo nello stesso tempo nel quale descriverebbe separatamente

i lati". Rappresentiamo una forza mediante una "freccia" (fig.4.1), che abbia la direzione e il verso della forza stessa, e la cui lunghezza ne misuri l'intensità.

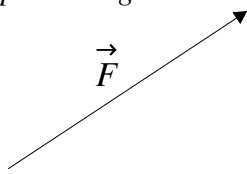


fig. 4.1

Newton afferma che due forze producono gli stessi effetti meccanici di una sola forza, diretta come la

diagonale del parallelogrammo che ha come lati consecutivi le prime due

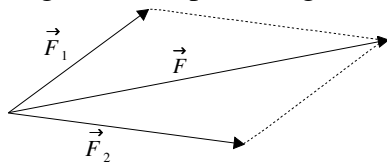


fig. 4.2

(fig. 4.2), e la cui intensità sia rappresentata esattamente dalla lunghezza della diagonale di quel parallelogrammo.

Anche i vettori, come i numeri, si possono sommare, ma con regole del tutto differenti da quelle che valgono per i numeri. È

possibile sviluppare un calcolo tra i vettori, analogamente a quanto si è fatto per gli insiemi numerici, scoprendo significative analogie e differenze.

Inoltre, e questo è forse l'obiettivo più interessante, vedremo come il calcolo vettoriale può condurci a interpretare relazioni tipicamente geometriche nel

piano, come il parallelismo e la perpendicolarità tra rette, in forma puramente algebrica; sulla scorta di queste interpretazioni, e con lievi modifiche e aggiustamenti, saremo in grado di passare dalla geometria analitica del piano a quella dello spazio, portando a compimento quell'ambizioso progetto della **geometria analitica** che consiste nell'associare biunivocamente a concetti geometrici enti algebrici e viceversa.

Divagazione. Gli assiomi della geometria del piano.

Nei prossimi capitoli ci occuperemo di geometria, dapprima nel piano e poi nello spazio. L'insieme del quale tratteremo sarà dunque un insieme dei punti; abbiamo già visto come sia possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano e le coppie ordinate di numeri reali, cioè gli elementi dell'insieme $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. In modo analogo, l'insieme dei punti dello spazio è in corrispondenza biunivoca con le terne di numeri reali, cioè gli elementi dell'insieme $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

È possibile introdurre anche in \mathbb{R}^2 e in \mathbb{R}^3 una struttura algebrica? È possibile quindi trattare gli enti della geometria (per esempio punti, rette, piani) come elementi algebrici?

Descrivere attraverso strumenti algebrici lo spazio geometrico è l'obiettivo della *geometria analitica*. La definizione del fondamentale concetto di *vettore* ci consentirà di introdurre in \mathbb{R}^2 e in \mathbb{R}^3 la struttura di *spazio vettoriale*, una struttura algebrica del tutto diversa da quelle di gruppo, anello e campo che già conosciamo.

Prima di introdurre gli spazi vettoriali e la geometria analitica, vogliamo fare un passo indietro.

Che cosa è la geometria? Possiamo dire, in prima approssimazione, che la geometria è la descrizione matematica dello spazio, e quindi in un certo senso è il primo capitolo della fisica.

In questo approccio alla matematizzazione dello spazio, si considerano vere alcune proprietà fondamentali, chiamate *assiomi*, e da essi si deducono, mediante ragionamenti corretti, i *teoremi*, cioè altre proprietà.

Il primo matematico che si sia cimentato in questa opera di *assiomatizzazione* della geometria è stato Euclide. Nei suoi *Elementi*, il libro più tradotto nel mondo dopo la Bibbia, Euclide espone i seguenti cinque assiomi della geometria piana (che riportiamo nella versione di A.Frajese, edizione UTET):

I. Risulti postulato: che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto.

II. E che da una retta terminata (= finita) si possa prolungare continuamente in linea retta.

III. E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro ed ogni distanza (= raggio).

IV. E che gli angoli retti siano uguali tra loro.

V. E che, se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti (= tali che la loro somma sia minore di due retti), le due rette, prolungate illimitatamente verranno a incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti (= la cui somma è minore di due retti).

Gli assiomi e i teoremi di Euclide sono stati considerati per secoli un modello insuperabile di rigore formale e di perfezione didattica. Soltanto alla fine del secolo scorso la logica matematica ha chiarito i limiti della assiomatizzazione euclidea. In particolare il matematico tedesco David Hilbert (1862–1943) nel libro *Grundlagen der Geometrie (Fondamenti della geometria)*, pubblicato nel 1899) ha definitivamente caratterizzato la geometria come un

sistema ipotetico-deduttivo, cioè come l'insieme delle conseguenze logiche che si possono ricavare da un sistema di assiomi: date alcune *ipotesi* (gli assiomi), che consideriamo vere a priori, quali sono le *deduzioni* (i teoremi) che possiamo trarne?

Hilbert ha chiarito che gli assiomi definiscono implicitamente gli *enti primitivi* (punti, rette e piani) di cui tratta la geometria: noi non possiamo definire cosa sia un punto, perché qualunque definizione dovrebbe far ricorso ad altri oggetti definiti precedentemente, creando così un regresso all'infinito.

Nella trattazione di Hilbert (ci limitiamo alla geometria del piano) sono presentati cinque gruppi di assiomi: gli assiomi di *appartenenza*, di *ordinamento*, di *congruenza*, di *parallelismo*, di *continuità*. Qualunque proprietà delle figure del piano si può dimostrare a partire da questi assiomi.

ASSIOMI DI APPARTENENZA.

1. Per ogni coppia di punti distinti A e B esiste una e una sola retta r a cui appartengono sia A che B .
2. Per ogni retta r esistono almeno due punti distinti A e B che appartengono a r , ed esiste almeno un punto C che non appartiene a r .

Da questi assiomi segue immediatamente che due rette distinte o hanno un punto di intersezione, oppure non ne hanno nessuno. È possibile dare la definizione di *parallelismo* tra rette: due rette sono parallele se non hanno punti in comune, oppure coincidono. In base a tale definizione la relazione di parallelismo tra rette è una relazione di equivalenza nell'insieme delle rette del piano; la *direzione* di una retta è ciò che hanno in comune tutte le rette tra loro parallele, quindi la direzione di una retta "è" la classe di equivalenza a cui appartiene, rispetto alla relazione di parallelismo.

ASSIOMI DI ORDINAMENTO.

1. Per ogni retta r , e per ogni coppia di punti A, C appartenenti a r , esiste almeno un punto B appartenente a r compreso tra A e C .
2. Se tre punti distinti appartengono alla stessa retta, uno e uno solo di essi è compreso tra gli altri due.

I primi due assiomi consentono la definizione di *segmento* AB (l'insieme dei punti allineati con A e B e compresi tra A e B) e di *triangolo* (tre punti A, B, C non allineati e i tre segmenti che essi individuano).

3. Assioma di Pasch. Se una retta interseca il lato AB di un triangolo ABC in un punto diverso dagli estremi A e B , allora deve intersecare uno degli altri due lati, oppure passare per C .

Questo assioma garantisce in particolare che una retta che "entra" in una figura chiusa, ne debba anche "uscire". Si osservi che stiamo elencando gli assiomi del piano, e quindi la retta appartiene al piano del triangolo ABC ; nello spazio tale assioma risulterebbe falso.

ASSIOMI DI CONGRUENZA.

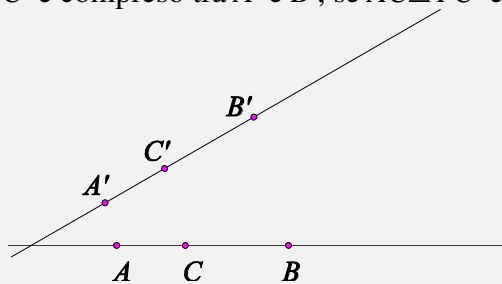
1. Per ogni coppia di punti A e B , qualunque sia il punto A' su una retta r , esiste un punto B' appartenente a r tale che AB è congruente a $A'B'$. Si scrive $AB \cong A'B'$.

Questo assioma esprime la possibilità del trasporto di un segmento.

2. Qualunque siano i punti A, B, C, D, E, F , se $AB \cong CD$ e $CD \cong EF$, allora $AB \cong EF$.

Questo assioma assicura che la relazione di congruenza tra segmenti sia transitiva. Si dimostra che la relazione di congruenza è anche riflessiva e simmetrica, cioè è una relazione di equivalenza.

3. Qualunque siano i punti A, B, C su una retta r e i punti A', B', C' su una retta s , se C è compreso tra A e B , se C' è compreso tra A' e B' , se $AC \cong A'C'$ e $CB \cong C'B'$, allora $AB \cong A'B'$.



Quindi i segmenti si possono sommare, e la somma di segmenti congruenti dà segmenti congruenti.

4. Dato un angolo \widehat{ABC} e una coppia di punti A', B' , esiste una semiretta $B'C'$ tale che gli angoli \widehat{ABC} e $\widehat{A'B'C'}$ siano congruenti: $\widehat{ABC} \cong \widehat{A'B'C'}$.

È l'assioma analogo all'assioma 1, che assicura il trasporto di un angolo.

5. Ogni angolo è congruente a se stesso.

Stabilisce che la relazione di congruenza tra angoli è riflessiva. Si dimostra che è anche simmetrica e transitiva, cioè è una relazione di equivalenza

6. Dati i triangoli ABC e $A'B'C'$, se $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, e $\widehat{ABC} \cong \widehat{A'B'C'}$, cioè i due triangoli hanno due lati e l'angolo tra essi compreso rispettivamente congruenti, allora $\widehat{ACB} \cong \widehat{A'C'B'}$, cioè essi hanno anche un secondo angolo congruente.

Da questo assioma si dimostra che anche il terzo lato e il terzo angolo sono congruenti. È questo il cosiddetto *primo criterio di congruenza* dei triangoli.

ASSIOMA DI PARALLELISMO.

1. Data una retta r e un punto A che non appartiene a r , esiste al più una retta passante per A e parallela a r .

L'esistenza della parallela viene dimostrata mediante il trasporto dell'angolo. Questo assioma è equivalente al quinto postulato di Euclide, ed è un assioma indispensabile della geometria piana; esistono geometrie *non-euclidee* in cui valgono tutti gli altri assiomi, ma non questo.

ASSIOMA DI CONTINUITÀ.

1. Esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti di una retta e l'insieme dei numeri reali.

È il postulato di continuità della retta, e costituisce il primo passo della geometria analitica: ogni punto di una retta è individuato da un numero reale.

Gli assiomi che abbiamo enunciato caratterizzano pienamente la geometria del piano, e sono sufficienti a dimostrare tutte le proprietà di cui godono le figure nel piano.

Per gli assiomi finora introdotti tutti gli elementi considerati appartengono a un unico piano. Cosa accade se passiamo a considerare le proprietà delle figure nello spazio?

Dobbiamo introdurre nuovi assiomi, che caratterizzino lo spazio rispetto al piano.

Gli assiomi della geometria dello spazio sono tutti quelli della geometria del piano, ai quali si aggiungono i seguenti.

ASSIOMI DI APPARTENENZA.

1. Tre punti distinti e non allineati appartengono a uno e un solo piano.

2. Per ogni piano α esistono almeno tre punti distinti e non allineati che appartengono a α , ed esiste almeno un punto che non appartiene a α .

3. Se due punti di una retta appartengono a un piano, tutti i punti della retta appartengono al piano.

Si dimostra che una retta e un punto esterno ad essa appartengono a uno e un solo piano, e che due rette incidenti appartengono a uno e un solo piano. In definitiva un piano è univocamente individuato da: tre punti non allineati, oppure una retta e un punto esterno, oppure da due rette incidenti.

L'assioma 2 garantisce l'esistenza di rette non complanari: infatti, dati quattro punti A, B, C, D non complanari, sia α il piano che contiene A, B, C , e quindi D sia esterno a α ; la retta AB , poiché ha due punti di intersezione con α , appartiene a α , mentre la retta CD ha in comune con α il solo punto C (se ne avesse un altro, sarebbe interamente contenuta in α , contro l'ipotesi che D non sia complanare con α); ne consegue che le rette AB e CD non appartengono allo stesso piano, e non hanno punti di intersezione. Esse sono dette *sghembe*; pur non avendo punti in comune, esse non sono parallele, poiché non individuano la stessa direzione.

Nello spazio la definizione di parallelismo tra rette è perciò la seguente: due rette sono parallele se coincidono, oppure se sono complanari e non hanno punti in comune; dunque un piano è univocamente determinato anche da una coppia di rette parallele e distinte.

Due piani (oppure una retta e un piano) sono paralleli se non hanno punti di intersezione.

A differenza di quanto avviene nel piano, in cui due rette distinte sono o parallele o incidenti, nello spazio due rette possono essere parallele, incidenti, o sghembe.

L'ultimo assioma necessario a caratterizzare la geometria dello spazio è il seguente.

ASSIOMA DI ORDINAMENTO.

Un piano α divide lo spazio in due sottoinsiemi S_1 e S_2 , detti *semispazi*, tali che se due punti A e B appartengono a uno stesso semispazio allora il segmento AB non ha punti di intersezione con α , mentre se A e B appartengono a due semispazi distinti allora il segmento AB ha un punto di intersezione con α .

1. DEFINIZIONE DI VETTORE

Consideriamo, nel piano, l'insieme di tutti i *segmenti orientati*.

Si usa rappresentare un segmento orientato con una "freccia", cioè con un segmento con una "punta" che ne indichi il verso; l'altro estremo viene detto *punto di applicazione*.

Se indichiamo con \mathcal{P} l'insieme dei punti del piano, un segmento orientato è in definitiva una *coppia ordinata* (A, B) di punti del piano stesso, cioè un elemento del prodotto cartesiano $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$.

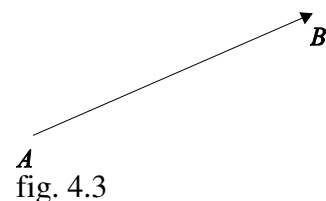
Nel segmento orientato (A, B) il punto A è chiamato anche *punto iniziale* e il punto B *punto finale* del segmento orientato (fig. 4.3).

Indicheremo il segmento orientato (A, B) anche con la notazione \overrightarrow{AB} .

Due segmenti orientati possono dunque essere diversi se hanno differente almeno uno degli elementi che li caratterizzano (lunghezza, direzione, verso, punto di applicazione).

Se il punto iniziale e il punto finale coincidono, il relativo segmento orientato è il segmento nullo, che ha direzione e verso indeterminati.

Due segmenti hanno la stessa direzione se appartengono a rette parallele.



Nell'insieme $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ dei segmenti orientati del piano introduciamo dunque la relazione di *equipollenza*.

DEFINIZIONE. Due segmenti orientati (A, B) e (C, D) , con $A \neq B$ e $C \neq D$ si dicono *equipollenti* se hanno:

- la stessa lunghezza
- la stessa direzione
- lo stesso verso

Tutti i segmenti nulli si considerano equipollenti.

*equipollenza di
segmenti orientati*

Scriveremo $(A, B) \sim (C, D)$.

Se i quattro punti A, B, C, D non sono allineati, allora (A, B) è equipollente a (C, D) se e solo se il quadrilatero $ABDC$ è un parallelogrammo (fig. 4.4).

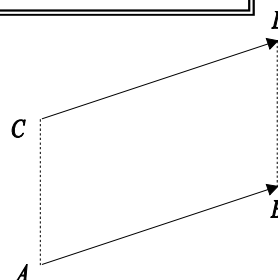


fig. 4.4

Si osservi che, per le proprietà del parallelogrammo, se $(A, B) \sim (C, D)$ allora risulta anche $(A, C) \sim (B, D)$.

Riportiamo nella fig. 4.5 esempi di coppie di segmenti orientati **non** equipollenti:

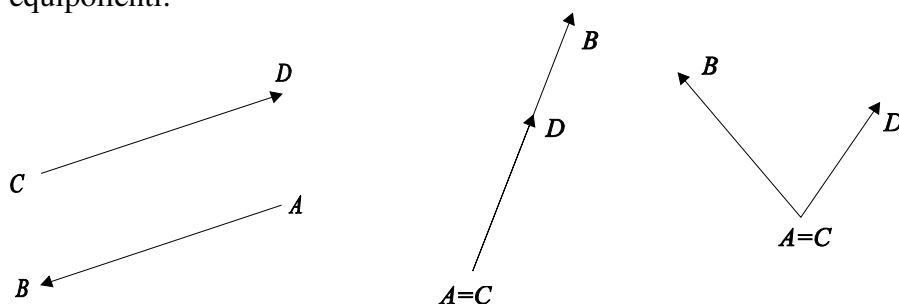
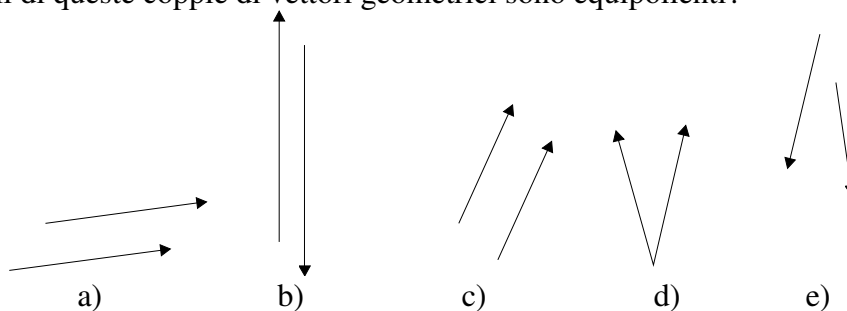


fig. 4.5

ESERCIZIO

Quali di queste coppie di vettori geometrici sono equipollenti?



La relazione di equipollenza tra segmenti orientati è chiaramente una relazione di equivalenza, poiché gode delle seguenti proprietà:

- riflessiva: per ogni segmento orientato (A, B) risulta $(A, B) \sim (A, B)$;
- simmetrica: se $(A, B) \sim (C, D)$ allora $(C, D) \sim (A, B)$;
- transitiva: se $(A, B) \sim (C, D)$ e $(C, D) \sim (E, F)$ allora $(A, B) \sim (E, F)$.

Vale il seguente

TEOREMA. Dato un segmento orientato (A, B) e un qualsiasi punto C , esiste ed è unico il punto D tale che $(A, B) \sim (C, D)$.

Dimostrazione. Se $A \equiv B$, allora $C \equiv D$, altrimenti bisogna distinguere due casi: se C non è allineato con A e B allora il punto D è il punto di intersezione della parallela per C alla retta AB e della parallela per B alla retta AC . (fig. 4.6)

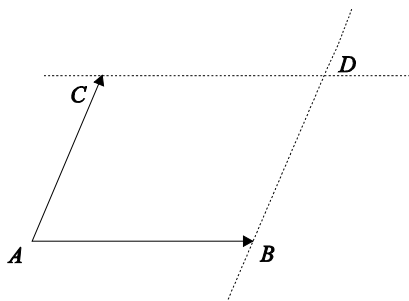


fig. 4.6

Se invece C è allineato con A e B , sfruttando la transitività della relazione di equipollenza, scelto un punto E non appartenente ad AB si costruisce $(E, F) \sim (A, B)$; poiché C non appartiene alla retta EF esiste un unico punto D tale che $(C, D) \sim (E, F)$, quindi $(E, F) \sim (A, B)$.

La relazione di equipollenza, poiché è una relazione di equivalenza, introduce nell'insieme $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ una partizione in classi di equivalenza, ciascuna delle quali contiene tutti i segmenti orientati aventi ugual lunghezza, direzione e verso.

DEFINIZIONE. Si chiama *vettore* ogni classe di equivalenza introdotta nell'insieme dei segmenti orientati del piano $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ dalla relazione di equipollenza. L'insieme \mathcal{V} dei vettori del piano è quindi l'insieme quoziente:

vettore

Indicheremo i vettori con i simboli $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \dots$. Se $\mathbf{u} = [\overrightarrow{AB}]$, con il solito abuso di notazione e di linguaggio parleremo di "vettore \overrightarrow{AB} " intendendo il vettore di cui \overrightarrow{AB} è uno dei *rappresentanti*.

La lunghezza del segmento orientato \overrightarrow{AB} (che è un numero reale positivo se $A \neq B$) si chiama **modulo** del vettore $\mathbf{v} = [\overrightarrow{AB}]$. Il modulo di un vettore $\mathbf{v} = [\overrightarrow{AB}]$ si indica con il simbolo $\|\mathbf{v}\|$, oppure $\|\overrightarrow{AB}\|$.

modulo di un vettore

Il vettore $[\overrightarrow{AA}]$, individuato da una coppia di punti coincidenti, è chiamato *vettore nullo* e indicato con $\mathbf{0}$; il suo modulo è 0, la sua direzione e il suo verso sono indeterminati.

vettore nullo

ESERCIZI

A. Dati i punti $A \equiv (1, 0)$, $B \equiv (2, 1)$, $C \equiv (-1, -1)$, $D \equiv (-2, -2)$, $O \equiv (0, 0)$ determinare quali tra essi, presi nel dovuto ordine, sono estremi di segmenti orientati equipollenti.

B. Determinare il punto D tale che $(A, B) \sim (C, D)$ dati:

- $A \equiv (1, 1)$ $B \equiv (2, 3)$ $C \equiv (-2, 1)$;
- $A \equiv (3, 0)$ $B \equiv (0, 1)$ $C \equiv (5, 2)$;
- $A \equiv (-6, 1)$ $B \equiv (4, 2)$ $C \equiv (5, 0)$;
- $A \equiv (1, -1)$ $B \equiv (2, 0)$ $C \equiv (-2, -2)$

C. Dati A, B, C determinare tutti i punti che con A, B, C , presi in ordine opportuno, formano coppie di segmenti equipollenti, escludendo il segmento nullo:

- $A \equiv (0, 1)$ $B \equiv (-2, -1)$ $C \equiv (0, -1)$;
- $A \equiv (5, 0)$ $B \equiv (1, -3)$ $C \equiv (0, 5)$;
- $A \equiv (-1, -1)$ $B \equiv (-1, 2)$ $C \equiv (2, -1)$;
- $A \equiv (1, 1)$ $B \equiv (2, 3)$ $C \equiv (-2, 1)$.

D. Se due segmenti orientati si corrispondono in una traslazione risultano equipollenti?

E. Dato $v = \overrightarrow{AB}$ determinare $\|v\|$:

- $A \equiv (0, 1)$ $B \equiv (-2, -1)$;
- $A \equiv (-1, -1)$ $B \equiv (-1, 2)$;
- $A \equiv (5, 0)$ $B \equiv (1, -3)$;
- $A \equiv (1, 1)$ $B \equiv (2, 3)$.

2. LA SOMMA DI VETTORI.

Nell'insieme \mathcal{V} dei vettori del piano è possibile introdurre una operazione che chiameremo "somma", ma che non ha nulla a che vedere con l'operazione di somma negli insiemi numerici.

Tale operazione trae la sua origine storica dalla fisica, e nasce quando si rappresentano le *forze* mediante vettori; l'intensità della forza è così rappresentata dal modulo del vettore. Applicando due forze \vec{F}_1 e \vec{F}_2 nel medesimo punto, si osserva che esse danno luogo agli stessi effetti meccanici di una singola forza \vec{F} applicata nello stesso punto che abbia la stessa intensità (il modulo del corrispondente vettore), la stessa direzione e lo stesso verso della diagonale del parallelogrammo formato dalle due forze iniziali (fig. 4.7).

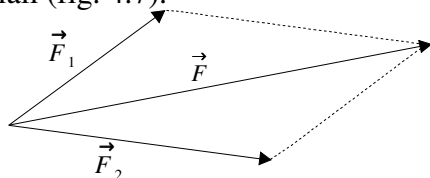


fig. 4.7

metodo del parallelogrammo

Applicando a un corpo contemporaneamente le due forze \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , oppure la sola forza \vec{F} , il corpo acquista movimento con le stesse caratteristiche: dal punto di vista meccanico le due forze \vec{F}_1 e \vec{F}_2 producono gli stessi effetti della forza \vec{F} . Siamo condotti di conseguenza a definire una "somma", in modo che

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}.$$

Secondo questo metodo i due vettori addendi devono avere lo stesso punto di applicazione. Inoltre il metodo del parallelogrammo cade in difetto se i due vettori sono paralleli; infatti in questo caso il parallelogrammo diventa degenere. Se interpretiamo i vettori come forze applicate nello stesso punto possiamo facilmente renderci conto di ciò che accade in questo caso con un ragionamento "al limite". Si osservino le figure 4.8 seguenti:

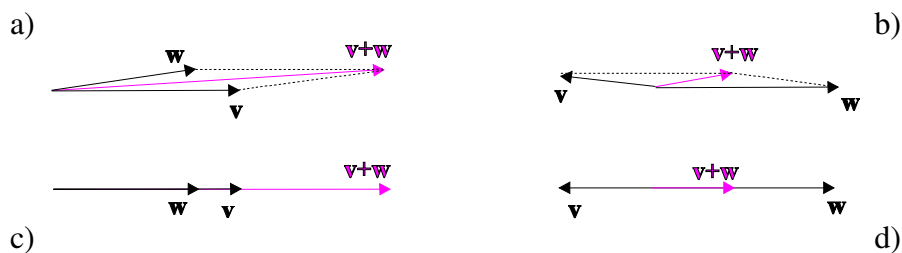


fig. 4.8

nelle figure *a* e *b* il parallelogrammo individuato da \mathbf{v} e \mathbf{w} non è degenere, ma "quasi"; nelle seconde (figure *c* e *d*) è degenere. Si può osservare che se \mathbf{v} e \mathbf{w} hanno la stessa direzione e lo stesso verso (figura *c*) allora la loro somma è il vettore che ha la stessa direzione e verso, e modulo uguale alla somma dei moduli di \mathbf{v} e \mathbf{w} ; se \mathbf{v} e \mathbf{w} hanno la stessa direzione e verso opposto (figura *d*) allora la loro somma è il vettore che ha la stessa direzione, il verso uguale al verso del vettore di modulo maggiore, e ha per modulo la differenza dei moduli.

Un altro modo di pensare alla somma di vettori è il seguente. Nel piano ogni *traslazione* è definita da un vettore. Se un punto trasla dapprima dal punto *A* al punto *B*, e poi dal punto *B* al punto *C*, la sua traslazione complessiva è rappresentata dal vettore \vec{AC} (fig. 4.9).

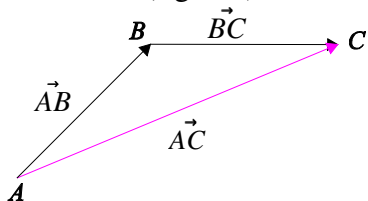


fig. 4.9

metodo punta-coda

Risulta allora naturale definire la somma di vettori:

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}.$$

Abbiamo sommato due forze con il metodo del parallelogrammo, e due traslazioni con il metodo punta coda; i due metodi sono solo apparentemente diversi: infatti nel metodo punta-coda il segmento *AC* è la diagonale del parallelogrammo *ABCD* (fig. 4.10).

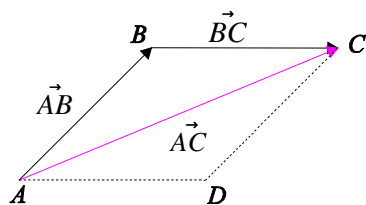


fig. 4.10

Il metodo punta-coda è tuttavia più generale, ed è applicabile in qualunque caso.

Tutte le precedenti osservazioni ci conducono alla seguente definizione.

DEFINIZIONE. Dati due vettori \mathbf{v} e \mathbf{w} , si scelgano come rappresentanti due segmenti orientati \vec{AB} e \vec{BC} tali che

$$\mathbf{v} = [\vec{AB}] \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = [\vec{BC}]$$

Risulta per definizione

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = [\vec{AC}].$$

addizione di vettori

È immediato dimostrare che la definizione è indipendente dai rappresentanti scelti.

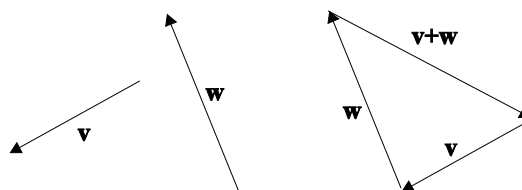
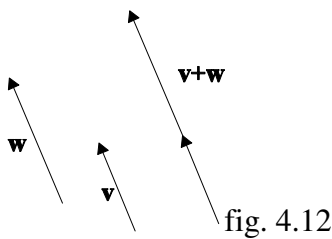


fig. 4.11

Dalla definizione risulta che, se i vettori \mathbf{v} e \mathbf{w} sono paralleli (hanno cioè la stessa direzione), il vettore $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ ha la stessa direzione di \mathbf{v} e \mathbf{w} . Se \mathbf{v} e \mathbf{w} hanno la stessa direzione e lo stesso verso allora $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ è il vettore che ha la stessa direzione e lo stesso verso di \mathbf{v} e \mathbf{w} , e il modulo di $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ è uguale alla somma dei moduli di \mathbf{v} e \mathbf{w} (fig 4.12):

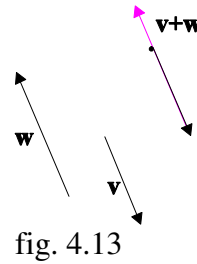


$$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|;$$

si osservi che lo stesso simbolo "+" è usato con due significati differenti: a primo membro indica una somma di vettori, a secondo membro una somma di numeri reali.

Se \mathbf{v} e \mathbf{w} hanno la stessa direzione e verso opposto, allora il vettore $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ ha la direzione comune a \mathbf{v} e \mathbf{w} , il verso di $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ è quello del vettore maggiore in modulo tra \mathbf{v} e \mathbf{w} , e il modulo di $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ è il valore assoluto della differenza tra i moduli di \mathbf{v} e \mathbf{w} :

$$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| = \left| \|\mathbf{w}\| - \|\mathbf{v}\| \right|.$$



Se in particolare $\|\mathbf{v}\|=\|\mathbf{w}\|$ allora il vettore $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ è il vettore nullo.

Se \mathbf{v} e \mathbf{w} non hanno la stessa direzione allora

$$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{w}\| + \|\mathbf{v}\|,$$

dato che in un triangolo la lunghezza di ogni lato è minore della somma delle lunghezze degli altri due.

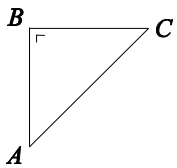


fig. 4.14

Ecco un caso in cui "2+2 non fa 4": nella figura 4.14 consideriamo i due vettori \vec{AB} e \vec{BC} .

Se $\|\vec{AB}\|=2$, e $\|\vec{BC}\|=2$, e per esempio \vec{AB} è perpendicolare a \vec{BC} , allora $\|\vec{AB} + \vec{BC}\| = \|\vec{AC}\| = 2\sqrt{2}$.

Abbiamo definito nell'insieme \mathcal{V} dei vettori del piano l'operazione di somma. Quali delle proprietà della somma che sono usuali negli insiemi numerici valgono anche per la somma di vettori?

La somma di vettori è *commutativa*, cioè comunque scelti $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ risulta

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}.$$

proprietà commutativa

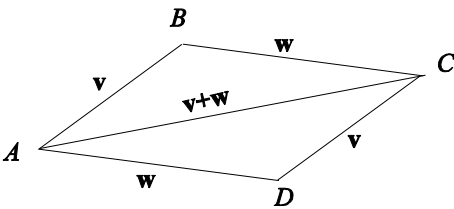


fig. 4.15

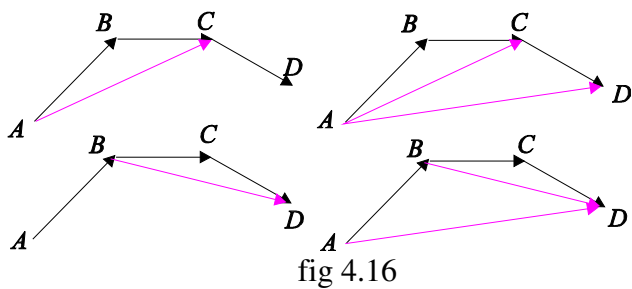
La figura 4.15 illustra la proprietà: risulta $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$; poiché $\vec{AD} \sim \vec{BC}$ e poiché il quadrilatero $ABCD$ è un parallelogrammo, risulta $\vec{DC} \sim \vec{AB}$ e quindi $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AD} + \vec{DC}$.

La somma di vettori è *associativa*, cioè comunque scelti $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u} \in \mathcal{V}$ risulta

$$\mathbf{v} + (\mathbf{w} + \mathbf{u}) = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{u}.$$

proprietà associativa

Nelle figure 4.16 è illustrata la proprietà



$$\begin{aligned}
 & (\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CD} \\
 &= \vec{AB} + (\vec{BC} + \vec{CD}).
 \end{aligned}$$

fig 4.16

Poiché la somma di vettori è associativa possiamo parlare di somma di più vettori. Se scegliamo per ogni vettore il rappresentante che ha come punto iniziale il punto finale del vettore precedente, allora la somma di più vettori è uguale al vettore che ha come punto iniziale il punto iniziale del primo addendo, e come punto finale il punto finale dell'ultimo addendo, come mostra la figura 4.17, in cui $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 + \mathbf{v}_5 + \mathbf{v}_6$.

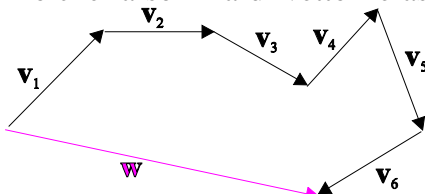


fig. 4.17

La somma di vettori ammette **elemento neutro**, che è il vettore nullo $\mathbf{0}$.

elemento neutro

La somma di più vettori è nulla se e solo se il punto finale dell'ultimo addendo coincide con il punto iniziale del primo.

In particolare in ogni triangolo ABC risulta

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \mathbf{0}.$$

Ogni vettore \mathbf{v} ammette **inverso** rispetto alla somma.

elemento inverso

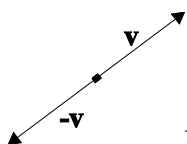


fig. 4.18

Se fissiamo un qualsiasi vettore \mathbf{v} , esiste un altro vettore che sommato con \mathbf{v} dà il vettore nullo. Tale vettore, che chiamiamo più precisamente *vettore opposto* di \mathbf{v} e che indichiamo con $-\mathbf{v}$, ha la stessa direzione, lo stesso modulo di \mathbf{v} , ma verso opposto (fig. 4.18). In

generale l'opposto del vettore \vec{AB} è il vettore \vec{BA} .

Possiamo concludere che l'insieme \mathcal{V} di tutti i vettori del piano, rispetto alla operazione di somma, ha la struttura di **gruppo commutativo** o **abeliano**.

$(\mathcal{V}, +)$ è gruppo abeliano

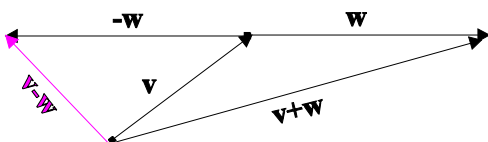


fig. 4.19

Risulta quindi possibile definire nel solito modo l'operazione di *sottrazione* tra vettori (figura 4.19):

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w}).$$

Se usiamo il metodo del parallelogrammo per sommare i vettori \vec{AB} e \vec{AD} , scopriamo che, mentre $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ è il vettore rappresentato dalla diagonale AC del parallelogrammo $ABCD$, il vettore $\vec{AB} - \vec{AD}$ è rappresentato dall'altra diagonale DB del parallelogrammo.

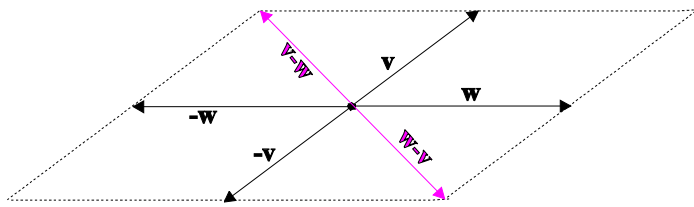


fig. 4.20

In altri termini, se i rappresentanti dei vettori \mathbf{v} e \mathbf{w} hanno lo stesso punto di applicazione A e punti finali rispettivamente B e C , (fig. 4.21) allora $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ è rappresentato dal terzo lato del triangolo ABC , orientato dalla punta di \vec{AC} alla punta di \vec{AB} . Infatti

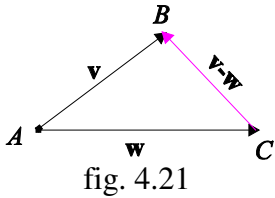


fig. 4.21

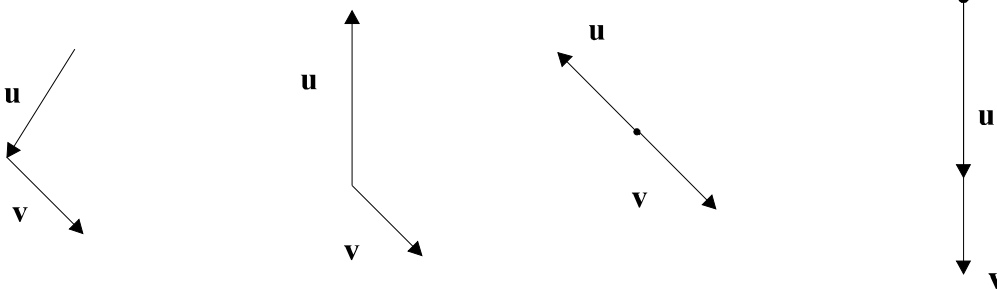
$$\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{CA} = \vec{CA} + \vec{AB} = \vec{CB}.$$

ESERCIZI:

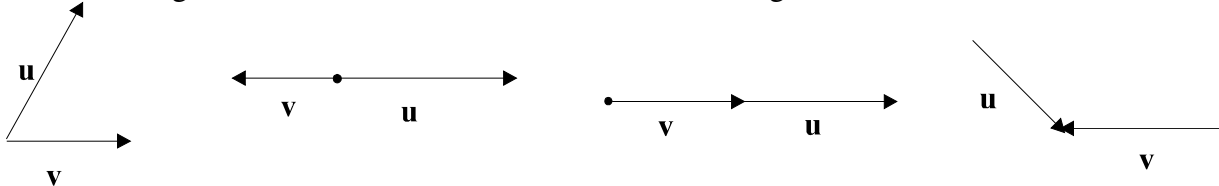
A. Completare la seguente tabella:

A	B	C	D	$\vec{[AB]} + \vec{[CD]}$	$\vec{[AB]} - \vec{[CD]}$	$\vec{[CD]} - \vec{[AB]}$
(0, 1)	(0, 0)	(0, 1)	(5, 7)			
(2, -4)	(3, 5)	(3, 5)	(0, 6)			
(7, 1)	(-1, 1)	(5, 1)	(3, 1)			
(0, 2)	(-1, 5)	(1, -2)	(2, -1)			
(2, 1)	(0, -3)	(-2, 0)	(-3, 8)			
(0, 4)	(-1, -2)	(0, 0)	(9, 5)			
(2, -6)	(1, -1)	(9, 1)	(-1, -5)			
(-1, 4)	(2, -3)	(-1, 0)	(7, 0)			
(-2, -1)	(1, 1)	(0, 0)	(-2, 1)			

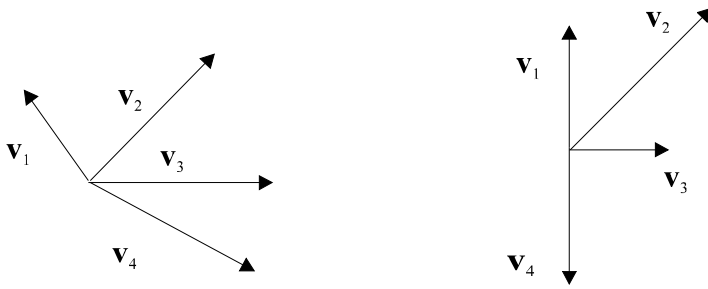
B. Costruire geometricamente il vettore $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ nei seguenti casi:



C. Costruire geometricamente il vettore $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ e $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ nei seguenti casi:



D. Costruire geometricamente il vettore $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$ nei seguenti casi:



E. Determinare l'inverso di $\mathbf{v} = [AB]$ rispetto all'operazione di somma tra vettori in ciascuno dei seguenti casi:

- $A \equiv (0, 2)$ $B \equiv (1, -3)$; • $A \equiv (1, 0)$ $B \equiv (2, 1)$;
- $A \equiv (-1, -1)$ $B \equiv (0, 2)$; • $A \equiv (1, 1)$ $B \equiv (2, 3)$.

F. Si considerino due forze agenti su uno stesso punto P di intensità f_1 ed f_2 , e formanti fra loro un angolo di 90° . Calcolare la forza risultante.

3. PRODOTTO DI UN VETTORE PER UN NUMERO

Come abbiamo già osservato per la somma, anche il prodotto di un vettore per un numero ha un riscontro in una operazione definita per le grandezze che i vettori rappresentano. Non è difficile immaginare cosa sia una forza doppia di un'altra o una velocità che sia il decimo di un'altra.

L'operazione che vogliamo introdurre è diversa da tutte quelle che abbiamo definito negli insiemi numerici; abbiamo definito una operazione in un insieme A come una applicazione del prodotto cartesiano $A \times A$ in A , cioè una applicazione che associa ad ogni coppia ordinata di elementi di A un elemento di A . Nel caso che stiamo esaminando vogliamo associare ad ogni coppia ordinata (k, \mathbf{v}) del prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathcal{V}$ un elemento di \mathcal{V} , cioè un nuovo vettore, che indicheremo con il simbolo $k\mathbf{v}$.

DEFINIZIONE. Dati $k \in \mathbb{R}$, e $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, definiamo il vettore $k\mathbf{v}$ nel seguente modo: se $k = 0$ oppure $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, allora $k\mathbf{v} = \mathbf{0}$, altrimenti:

- $k\mathbf{v}$ ha la stessa direzione di \mathbf{v}
- $k\mathbf{v}$ ha lo stesso verso di \mathbf{v} se $k > 0$ e verso opposto se $k < 0$
- $k\mathbf{v}$ ha per modulo il prodotto tra il valore assoluto di k e il modulo di \mathbf{v} :

$$\|k\mathbf{v}\| = |k| \cdot \|\mathbf{v}\|.$$

prodotto di un vettore per un numero reale

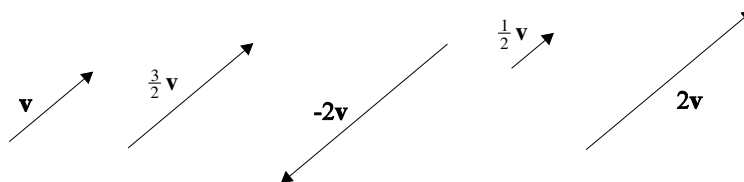


fig.4.22

Nella definizione il valore assoluto $|k|$ si rende necessario perchè il modulo deve essere un numero reale positivo, mentre k può essere sia positivo che negativo.

In particolare se $k = 1$ allora $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$, e se $k = -1$, allora $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$, l'opposto di \mathbf{v} .

Se i vettori \mathbf{v} e \mathbf{w} sono paralleli allora esiste un numero reale k tale che $\mathbf{w} = k\mathbf{v}$ (e naturalmente $\mathbf{v} = \frac{1}{k}\mathbf{w}$), infatti scelti su una retta i punti O, A, B

tali che $\mathbf{v} = [\vec{OA}]$ e $\mathbf{w} = [\vec{OB}]$, per il postulato di continuità della retta reale esiste un numero reale k tale che $\|\vec{OB}\| = |k| \|\vec{OA}\|$. Viceversa, dati due punti distinti A e B e un numero reale k ($k \neq 0$ e $k \neq 1$) esiste ed è unico, sulla retta AB un punto O tale che $\vec{OB} = k\vec{OA}$.

Di quali proprietà gode l'operazione di prodotto per un numero reale?

Sfruttando il teorema di Talete possiamo dimostrare che il prodotto di un

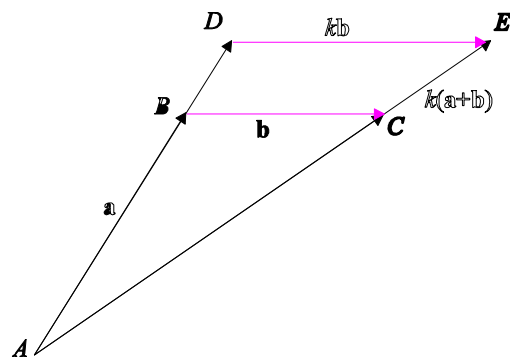


fig. 4.23

vettore per un numero reale gode della proprietà distributiva rispetto alla somma di vettori: per ogni $k \in \mathbb{R}$ e per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}$ risulta

$$k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$$

Infatti (fig. 4.23) il vettore $\vec{DE} = k\mathbf{b}$ è parallelo a $\vec{BC} = \mathbf{b}$, quindi per il teorema di Talete risulta

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = k,$$

quindi $\vec{AE} = k\vec{AC}$, cioè $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$.

Valgono inoltre le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} (a + b)\mathbf{v} &= a\mathbf{v} + b\mathbf{v} && \text{(proprietà pseudodistributiva)} \\ a(b\mathbf{v}) &= (ab)\mathbf{v} && \text{(proprietà pseudoassociativa)} \end{aligned}$$

Queste proprietà sono chiamate pseudodistributiva e pseudoassociativa perchè, anche se nell'aspetto sembrano una proprietà distributiva e una proprietà associativa, le operazioni che in esse compaiono non sono uguali a primo e secondo membro: nella prima il segno + a primo membro indica la somma di numeri, mentre quello a secondo membro la somma di vettori; nella seconda si ha il prodotto di un numero per un vettore a primo membro e il prodotto tra numeri al secondo.

Divagazione. I vettori in fisica.

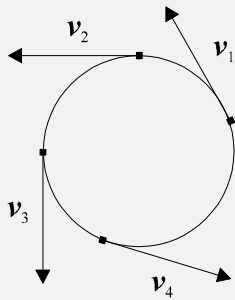
In fisica l'utilizzo dei vettori è fondamentale: diverse leggi fisiche necessitano, per essere enunciate, di grandezze vettoriali.

Vogliamo mostrare con alcuni esempi come una interpretazione vettoriale degli eventi fisici conduca ad una più profonda comprensione degli eventi stessi, e permetta di enunciare le relative leggi in modo estremamente sintetico.

Nel linguaggio comune la velocità è la grandezza che misura la *rapidità* dello spostamento, indipendentemente dalla direzione dello spostamento stesso, e l'accelerazione è la grandezza che misura la rapidità con cui *varia* la velocità, indipendentemente dalla direzione della velocità. Siamo allora portati a dire che un corpo che si muove, per esempio, di moto circolare uniforme ha *velocità costante*, e quindi *accelerazione nulla*.

Non è così.

Se descriviamo la velocità mediante un vettore (modulo, direzione e verso), dobbiamo concludere che in un moto circolare uniforme la velocità cambia istante per istante, perché, pur rimanendo costante il *modulo* della velocità, cambia istante per istante la *direzione*.



Quindi non è vero che l'accelerazione è nulla.

L'accelerazione (vettoriale) è per definizione il vettore

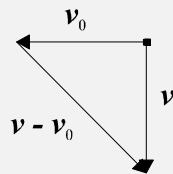
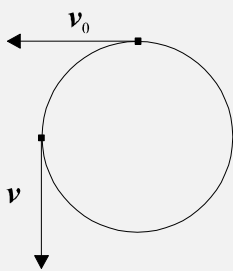
$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_0}{\Delta t}$$

dove \mathbf{v}_0 è il vettore velocità iniziale, \mathbf{v} è il vettore velocità finale, e Δt è l'intervallo di tempo in cui avviene la variazione di velocità da \mathbf{v}_0 a \mathbf{v} ; $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$ è il vettore differenza tra \mathbf{v} e \mathbf{v}_0 . Il rapporto tra il vettore $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$ e il numero Δt va interpretato come il prodotto del vettore $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$ per il

numero reale $1/\Delta t$.

Calcoliamo per esempio l'accelerazione media di un moto circolare uniforme in un intervallo di tempo necessario a compiere un quarto di cerchio.

Se supponiamo per semplicità $\Delta t = 1$, allora $\mathbf{a} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0$; il disegno mostra che il vettore accelerazione è diretto verso l'interno della curva, e se lo applichiamo nel punto medio dell'arco descritto è diretto esattamente verso il centro della traiettoria. Quindi l'accelerazione in un moto circolare uniforme non è nulla; per la legge fondamentale della dinamica



$$\mathbf{F} = m\mathbf{a},$$

occorre allora una forza per mantenere un corpo su una traiettoria circolare.

Newton enuncia il *principio di inerzia* nel seguente modo: "Ogni corpo persevera nel proprio stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, salvo che sia costretto a mutare quello stato da forze impresse".

L'utilizzo di grandezze vettoriali permette di

enunciare il principio di inerzia in modo elegante e sintetico. Infatti lo *stato di quiete o di moto rettilineo uniforme* è caratterizzato semplicemente dal fatto che sia costante il vettore velocità (cioè la velocità sia costante in modulo, direzione e verso), e quindi sia nullo il vettore accelerazione:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)/\Delta t = (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_0)/\Delta t = \mathbf{0}.$$

L'enunciato del principio di inerzia è così semplificato:

Principio di inerzia: $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ se e solo se $\mathbf{F} = \mathbf{0}$,

dove con \mathbf{F} intendiamo la somma delle forze agenti sul corpo.

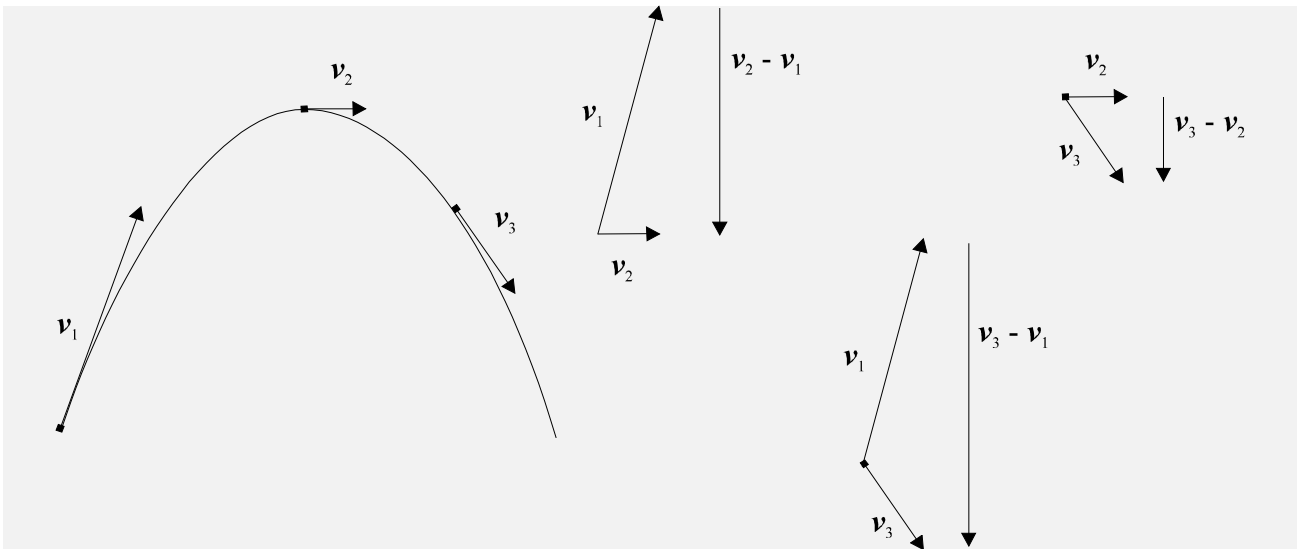
Un altro esempio: consideriamo il moto di un proiettile lanciato con un certo angolo di elevazione rispetto al piano orizzontale (la traiettoria è una parabola).

L'unica forza che agisce su di esso è la forza di gravità, che è costante; dunque il vettore accelerazione è costante, cioè l'accelerazione è costante in modulo, direzione e verso, è sempre diretta come la verticale, verso il basso, e il suo modulo è, sulla superficie terrestre, circa 9.8 m/s^2 .

Questo significa che se consideriamo il vettore velocità in due diversi istanti, poiché

$$\mathbf{a} = (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)/\Delta t \quad \text{e} \quad \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \Delta t \mathbf{a}$$

il vettore $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$ ha sempre la stessa direzione e verso di \mathbf{a} , cioè è sempre diretto verticalmente verso il basso.



ESERCIZI:

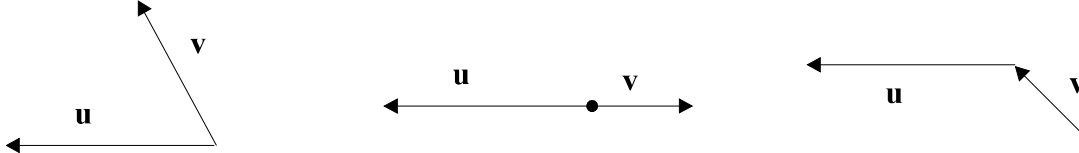
A. Dato $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ determinare un rappresentante per $\mathbf{w} = 3\mathbf{v}$ nei seguenti casi:

- $A \equiv (0, 0)$ $B \equiv (1, -3)$; • $A \equiv (1, 0)$ $B \equiv (2, 0)$;
- $A \equiv (-1, -1)$ $B \equiv (0, 2)$; • $A \equiv (0, 1)$ $B \equiv (1, 1)$;
- $A \equiv (1, 0)$ $B \equiv (-1, 1)$; • $A \equiv (0, 1)$ $B \equiv (-1, -1)$.

B. Costruire geometricamente $2\mathbf{u}$, $3\mathbf{u}$, $-2\mathbf{u}$, $-4\mathbf{u}$ nei seguenti casi:



C. Costruire geometricamente i vettori $\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$ e $\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$ nei seguenti casi:



D. Determinare le proprietà in base alle quali risultano vere le seguenti uguaglianze:

- $(1+6)\mathbf{v} = 2\mathbf{v} + 5\mathbf{v}$; • $4[5(\mathbf{v} + \mathbf{w})] = 20\mathbf{v} + 20\mathbf{w}$;
- $15\mathbf{v} + 10\mathbf{w} = 5(3\mathbf{v} + 2\mathbf{w})$; • $2(\mathbf{v} + \mathbf{w}) + (\mathbf{v} + 2\mathbf{w}) = 3\mathbf{v} + 4\mathbf{w}$.

APPROFONDIMENTI: GLI SPAZI VETTORIALI

Abbiamo dunque costruito una nuova *struttura algebrica*, definendo il prodotto tra elementi del gruppo abeliano $(\mathcal{V}, +)$ e elementi del campo \mathbb{R} . Tale struttura, che prende il nome di *spazio vettoriale*, costituisce lo strumento fondamentale per descrivere lo spazio geometrico mediante enti algebrici.

La struttura di spazio vettoriale è una struttura più complessa della struttura di gruppo, perché coinvolge due insiemi.

Si consideri un *gruppo abeliano* $(\mathcal{V}, +)$, i cui elementi \mathbf{v} chiamiamo *vettori*, e un *campo* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, i cui elementi k chiamiamo *scalari*.

Ciascuna delle due strutture ha dunque sue proprie operazioni: una addizione per il gruppo dei vettori, una addizione e una moltiplicazione per il campo di scalari.

Definiamo una ulteriore legge

$$K \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$$

che ad ogni coppia formata da uno scalare e da un vettore associ un vettore (prodotto di un vettore per uno scalare), con le seguenti proprietà: per ogni coppia $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ e per ogni coppia $h, k \in K$ sia:

$$k(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = k\mathbf{v} + k\mathbf{w}$$

$$(h + k)\mathbf{v} = h\mathbf{v} + k\mathbf{v}$$

$$(hk)\mathbf{v} = h(k\mathbf{v})$$

$$1\mathbf{v} = \mathbf{v}.$$

La struttura così definita viene chiamata *spazio vettoriale sul campo K*.

Mostriamo con alcuni esempi come si possano affrontare problemi tipicamente geometrici in modo essenzialmente algebrico, sfruttando i vettori e le operazioni che abbiamo definito tra essi.

TEOREMA. Il segmento che unisce i punti medi di due lati di un triangolo è parallelo al terzo lato, e la sua lunghezza è la metà della lunghezza del terzo lato.

Dimostrazione. Sia dato il triangolo ABC e siano M e N i punti medi dei lati AB e BC (fig. 4.24).

Per quanto sappiamo risulta

$$(1) \quad \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

e

$$(2) \quad \vec{MB} + \vec{BN} = \vec{MN};$$

d'altra parte $\vec{AB} = 2\vec{MB}$, e $\vec{BC} = 2\vec{BN}$, quindi sostituendo nella (1) otteniamo

$$2\vec{MB} + 2\vec{BN} = \vec{AC};$$

applicando la proprietà distributiva:

$$2(\vec{MB} + \vec{BN}) = \vec{AC},$$

e infine per la (2)

$$2\vec{MN} = \vec{AC},$$

cioè la tesi: se il vettore \vec{AC} è uguale al vettore $2\vec{MN}$ allora i segmenti AC e MN sono paralleli, e AC è doppio di MN .

TEOREMA. Il baricentro di un triangolo ABC è il punto G tale che

$$\vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG} = \mathbf{0}.$$

Dimostrazione. Il baricentro di un triangolo è per definizione il punto di intersezione delle mediane; un noto teorema di geometria piana afferma che il baricentro G divide ciascuna mediana in due parti, una doppia dell'altra.

Risulta (fig. 4.25)

$$\vec{AG} = \vec{AM} + \vec{MG}$$

$$\vec{CG} = \vec{CM} + \vec{MG}$$

$$\vec{BG} = 2\vec{GM}$$

da cui

$$\begin{aligned} \vec{AG} + \vec{CG} + \vec{BG} &= \vec{AM} + \vec{MG} + \vec{CM} + \vec{MG} + 2\vec{GM} = \\ &= \vec{AM} + \vec{CM} + \vec{MG} + \vec{MG} + 2\vec{GM} = \end{aligned}$$

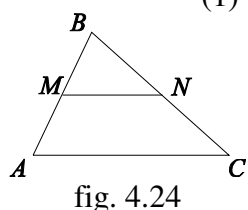


fig. 4.24

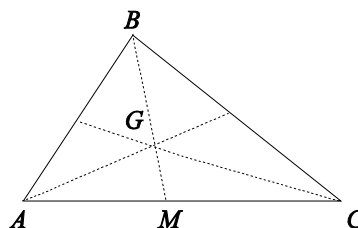
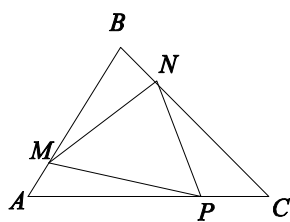


fig. 4.25

$$= \vec{AM} - \vec{AM} + \vec{MG} + \vec{MG} - 2\vec{MG} =$$

$$= \mathbf{0}$$



ESERCIZIO. Dato un triangolo ABC e un numero naturale $n > 1$, si considerino i punti M, N, P (fig. 4.26) tali che:

$$\vec{AM} = \frac{1}{n} \vec{AB}, \quad \vec{BN} = \frac{1}{n} \vec{BC}, \quad \vec{CP} = \frac{1}{n} \vec{CA}$$

Dimostrare che i triangoli ABC e MNP hanno lo stesso baricentro.

TEOREMA. Congiungendo i punti medi dei lati di un quadrilatero qualsiasi si ottiene un parallelogrammo.

Dimostrazione. Sia $ABCD$ un quadrilatero, e siano M, N, P, Q i punti medi dei lati (fig. 4.27).

Risulta, per ipotesi:

$$\mathbf{0} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA}$$

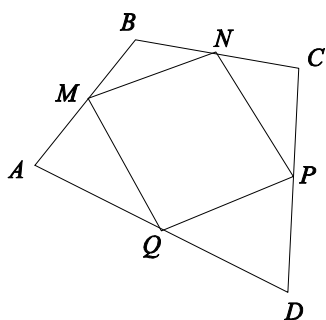


fig. 4.27

$$= 2\vec{MB} + 2\vec{BN} + 2\vec{PD} + 2\vec{DQ}$$

$$= 2(\vec{MB} + \vec{BN} + \vec{PD} + \vec{DQ})$$

$$= 2(\vec{MN} + \vec{PQ});$$

dunque $\vec{MN} + \vec{PQ} = \mathbf{0}$, cioè $\vec{MN} = -\vec{PQ} = \vec{QP}$; allora il segmento MN è parallelo a QP , e della stessa lunghezza, il che prova che $MNPQ$ è un parallelogrammo.

4. PROIEZIONI DI UN VETTORE.

Date due qualsiasi rette r ed s , incidenti in un punto P , vogliamo mostrare che ogni vettore \mathbf{v} che appartenga al piano di r ed s può essere ottenuto

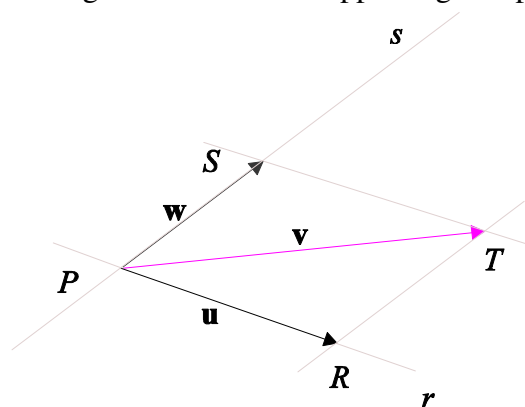


fig. 4.28

come somma di due vettori \mathbf{u} e \mathbf{w} diretti il primo come r ed il secondo come s .

Consideriamo dapprima (fig.4.28)

il vettore \vec{PT} .

Assegnate le due rette sono assegnate le direzioni dei lati del parallelogrammo di cui il vettore

\vec{PT} dato è diagonale; tracciando quindi le parallele alle due rette dal punto finale T si ottengono i

punti finali dei due vettori \mathbf{u} e \mathbf{w} tali che sia $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$. Poiché la retta passante per un punto e parallela ad un'altra retta è unica, tale scomposizione è *unica*.

Consideriamo ora un altro rappresentante \vec{QR} equipollente a \vec{PT} , tracciamo le parallele alle due rette r ed s passanti per il punto di applicazione Q e per il punto finale R (fig.4.29).

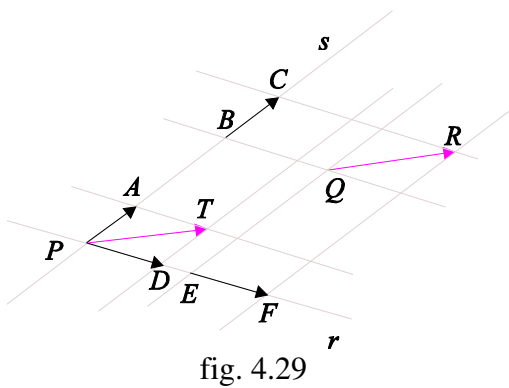


fig. 4.29

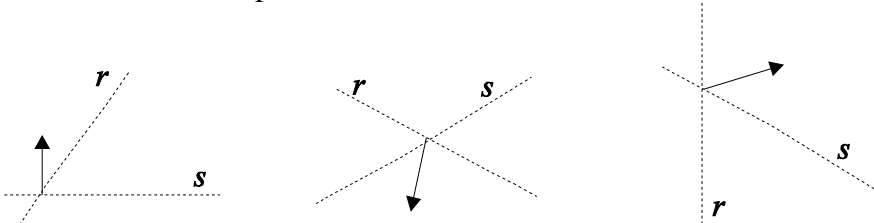
Per il teorema di Talete i segmenti PA e BC sono congruenti, poiché lo sono PT e QR , e così pure i segmenti PD ed EF , quindi i due rappresentanti equipollenti \vec{QR} e \vec{PT} hanno proiezioni \vec{EF} e \vec{PD} sulla retta r , \vec{BC} e \vec{PA} sulla retta s che risultano equipollenti.

Si può quindi dare la seguente:

DEFINIZIONE. Le proiezioni di un vettore \mathbf{v} lungo due rette incidenti r ed s complanari con \mathbf{v} sono i due vettori \mathbf{u} e \mathbf{w} , diretti come r e s e tali che

proiezioni

ESERCIZIO Scomporre il vettore \mathbf{v} tra le due rette r ed s .



Cosa succede se \mathbf{v} non è complanare con r e s ?

La costruzione effettuata nel piano si può estendere al caso dello spazio, pur di considerare tre rette incidenti e non complanari, e quindi tre proiezioni.

Nella figura 4.30 sono indicate tre rette, r , s , t incidenti in un punto P , in cui è applicato il vettore \mathbf{v} .

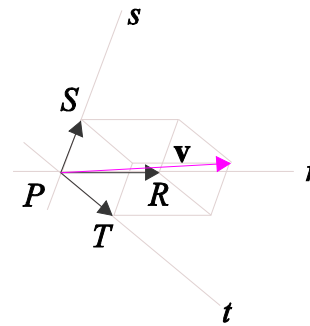


fig. 4.30

Se si costruiscono, dal punto finale di \mathbf{v} , i tre piani paralleli rispettivamente al piano di r e s , al piano di r e t , al piano di t e s , si ottiene che:

- il piano parallelo al piano di r e s interseca t in T ,
- il piano parallelo al piano di r e t interseca s in S ,
- il piano parallelo al piano di t e s interseca r in R .

I tre punti così ottenuti sono i punti finali delle tre proiezioni del vettore dato lungo le tre rette, quindi il vettore \mathbf{v} è la diagonale del parallelepipedo di spigoli PR , PS e PT .

OSSERVAZIONE: Nel caso piano per individuare R e S abbiamo utilizzato le due rette passanti per il punto finale di \mathbf{v} e parallele alle rette date; questa costruzione non può essere usata nello spazio, poiché ad esempio la retta passante per il punto finale del vettore \mathbf{v} e parallela alla retta r risulta sghemba sia con s che con t ; per questo motivo è necessario utilizzare dei piani anziché delle rette.

Sia nel caso piano che nel caso dello spazio, vale il seguente

TEOREMA Le proiezioni di una somma di vettori sono la somma delle proiezioni.

Le figure 4.31 e 4.32 illustrano la proprietà nel caso del piano e dello spazio. La dimostrazione è una semplice applicazione del teorema di Talete.

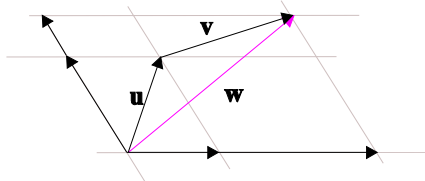


fig. 4.31

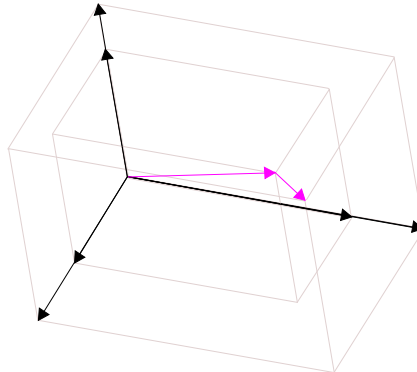


fig. 4.32

TEOREMA Le proiezioni di kv si ottengono moltiplicando per k le proiezioni di v .

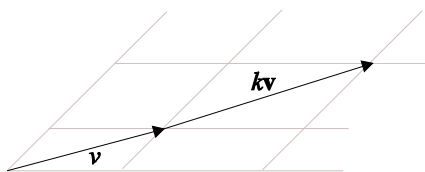


fig.4.33

Dimostrazione. È ancora il teorema di Talete ed è illustrata nella figura 4.33. Il caso spaziale è analogo.

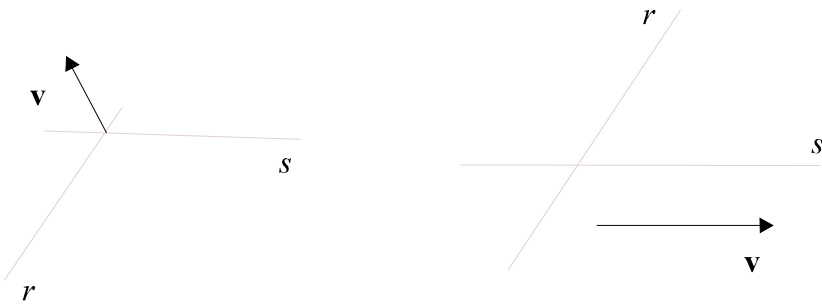
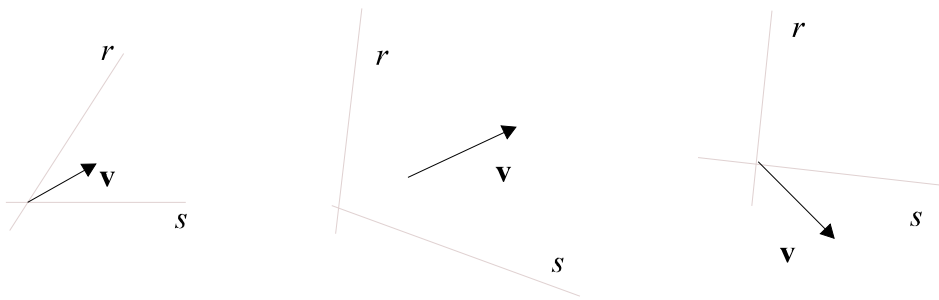
? E se k è negativo, cambia qualcosa? E se è $k=0$?

ESERCIZI:

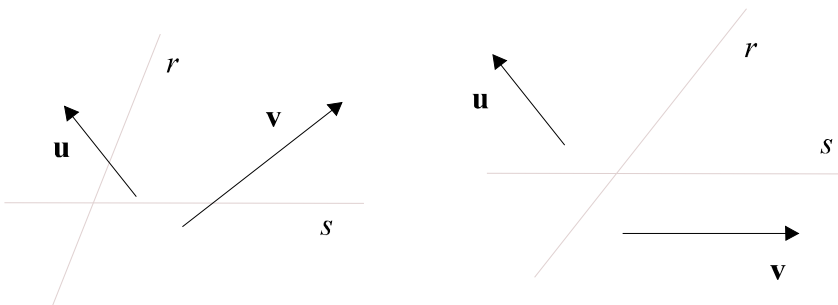
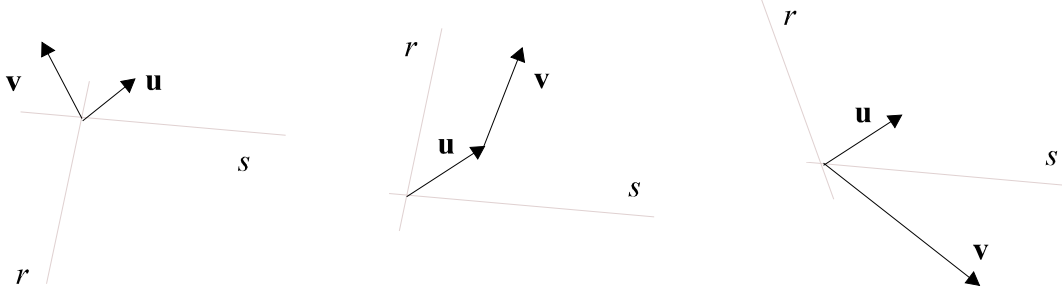
A. Considerare il vettore $\vec{v} = [\vec{AB}]$ e determinarne le proiezioni sugli assi coordinati, in ciascuno dei seguenti casi:

- | | | | |
|----------------------|----------------------|-----------------------|---------------------|
| • $A \equiv (0, 5)$ | $B \equiv (2, -3);$ | • $A \equiv (1, 0)$ | $B \equiv (2, 3);$ |
| • $A \equiv (-1, 2)$ | $B \equiv (5, -2);$ | • $A \equiv (0, 0)$ | $B \equiv (1, -3);$ |
| • $A \equiv (1, 0)$ | $B \equiv (2, 0);$ | • $A \equiv (-1, -1)$ | $B \equiv (0, 2);$ |
| • $A \equiv (0, 1)$ | $B \equiv (1, 1);$ | • $A \equiv (1, 0)$ | $B \equiv (-1, 1);$ |
| • $A \equiv (0, 1)$ | $B \equiv (-1, -1).$ | • $A \equiv (-2, -5)$ | $B \equiv (0, 5).$ |

B. Costruire le proiezioni dei seguenti segmenti sulle rette r ed s indicate:



C. Costruire le proiezioni di $2\mathbf{u} + \mathbf{v}$ sulle rette r ed s indicate in figura:



D. Riconsiderare l'esercizio C. e costruire le proiezioni di $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ e di $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ sulle rette r ed s indicate in figura.

E. Riconsiderare l'esercizio B. e costruire le proiezioni di $2\mathbf{u}$, $5\mathbf{u}$, $-2\mathbf{u}$ sulle rette r ed s indicate in figura.

5. COMPONENTI DI UN VETTORE

Fissiamo l'attenzione, per il momento, sul caso piano, anche se il caso dello spazio non è molto diverso. Abbiamo appena visto che ogni vettore \mathbf{v} si può scomporre in modo unico nelle sue due proiezioni \mathbf{u} e \mathbf{w} lungo due rette fissate r ed s . In particolare fissiamo nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale di origine O e scegliamo un rappresentante di \mathbf{v} applicato nell'origine O ; anche in questo caso, naturalmente, si potranno determinare le proiezioni del vettore \mathbf{v} lungo i due assi.

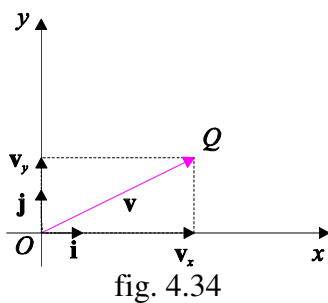


fig. 4.34

Fissiamo ora due vettori geometrici di modulo 1 diretti come i due assi (fig.4.34), ed applicati nell'origine.

Per convenzione i due **versori** (vettori di modulo 1) diretti come gli assi coordinati sono indicati con **i** e **j**.

? Quali sono le coordinate dei punti finali dei versori degli assi?

versori degli assi

Il vettore v_x proiezione di v lungo l'asse x risulta multiplo del vettore **i** (cioè esiste un numero reale k tale che $v_x = ki$) e analogamente il vettore v_y proiezione di v lungo l'asse y risulta multiplo di **j**.

Sia $Q \equiv (a, b)$ il punto finale del vettore $v = \vec{OQ}$.

Poichè **i** e **j** hanno modulo 1, risulta $v_x = ai$ e $v_y = bj$, quindi risulta

$$v = ai + bj.$$

v=ai+bj

DEFINIZIONE. I due numeri a e b sono detti le **componenti** di

componenti

Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, ogni vettore v è caratterizzato da una coppia ordinata di numeri reali, che sono le sue componenti lungo gli assi x e y .

Se a e b sono le componenti di v , scriveremo $v = [a, b]$.

? Quali sono le componenti di **i** e di **j**?

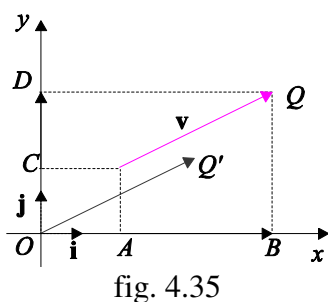


fig. 4.35

Se il vettore v (fig.4.35) è caratterizzato da un rappresentante \vec{PQ} , ove $P \equiv (m, n)$ e $Q \equiv (r, s)$ i due vettori \vec{AB} e \vec{CD} sono le proiezioni di \vec{PQ} lungo i due assi e risulta

$$\vec{AB} = (r-m)\mathbf{i} \text{ e } \vec{CD} = (s-n)\mathbf{j},$$

per cui risulta

$$v = \vec{AB} + \vec{CD} = (r-m)\mathbf{i} + (s-n)\mathbf{j} = [r-m, s-n].$$

Per proprietà delle proiezioni, posto $u = [a, b]$ e $w = [c, d]$ è:

$$u + w = [a, b] + [c, d] = [a + c, b + d] \quad ku = k[a, b] = [ka, kb]$$

? Se $P \equiv (3, 2)$ e $Q \equiv (1, 5)$ quali sono le componenti di \vec{PQ} ? e di \vec{QP} ?

Si consideri un punto $P \neq O$ e sia $\vec{OP} = [x, y] = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. Sia α l'angolo individuato dal semiasse positivo delle x e dalla semiretta OP .

Per quanto abbiamo visto nel capitolo sulla trigonometria, risulta, detto

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \|\vec{OP}\| :$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \sin \alpha$$

Il vettore \vec{OP} ha dunque componenti $[r \cos \alpha, r \sin \alpha]$ e quindi possiamo scrivere

$$\vec{OP} = r \cos \alpha \mathbf{i} + r \sin \alpha \mathbf{j}.$$

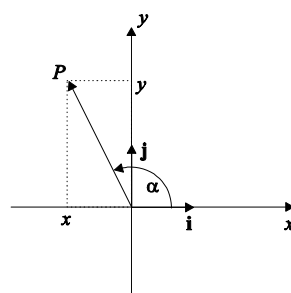


fig 4.36

ESERCIZI

A. Dato il vettore \mathbf{v} determinare il modulo e l'angolo formato dall'asse delle ascisse, pensato con la solita orientazione, e da \mathbf{v} . Scrivere poi le componenti nella forma $[r\cos\alpha, r\sin\alpha]$, ove \mathbf{v} sia:

- $\mathbf{v} = [1, 2];$
- $\mathbf{v} = [1, -2];$
- $\mathbf{v} = [1, 0, -1];$
- $\mathbf{v} = [1, 2];$
- $\mathbf{v} = [1, -1, 4];$
- $\mathbf{v} = [-1, 3];$
- $\mathbf{v} = [-1, -3];$
- $\mathbf{v} = [0, 0, 1];$
- $\mathbf{v} = [1, 1];$
- $\mathbf{v} = [1, 1, 3].$

B. Determinare le componenti del vettore \mathbf{v} di cui sia noto $r = \|\mathbf{v}\|$ ed $\alpha =$ ampiezza dell'angolo formato dall'asse delle ascisse con \mathbf{v} :

- $r = 2, \quad \alpha = 45^\circ;$
- $r = 1, \quad \alpha = 115^\circ;$
- $r = 4, \quad \alpha = 150^\circ;$
- $r = 2, \quad \alpha = 300^\circ;$
- $r = 2, \quad \alpha = 160^\circ;$
- $r = 3, \quad \alpha = 90^\circ;$
- $r = 5, \quad \alpha = 35^\circ;$
- $r = 3, \quad \alpha = 210^\circ;$
- $r = 1, \quad \alpha = 330^\circ;$
- $r = 3, \quad \alpha = 75^\circ.$

C. Dati i punti A e B determinare le coordinate cartesiane di $[\vec{AB}]$ nella forma $[r\cos\alpha, r\sin\alpha]$:

- $A \equiv (1, 2, 3), \quad B \equiv (0, -1, -3);$
- $A \equiv (-1, 2, 4), \quad B \equiv (1, -1, -2);$
- $A \equiv (2, 2), \quad B \equiv (-1, 4);$
- $A \equiv (1, 2, 3), \quad B \equiv (0, -1, -3);$
- $A \equiv (3, -2, -4),$
- $A \equiv (1, -2), \quad B \equiv (-1, -4).$
- $A \equiv (1, -2, 2), \quad B \equiv (2, -1, -1);$
- $A \equiv (1, 2), \quad B \equiv (-1, -1);$
- $A \equiv (2, -3), \quad B \equiv (0, 1);$
- $A \equiv (0, -2, 2), \quad B \equiv (2, 2, -1);$
- $B \equiv (4, 1, -2); \quad \bullet A \equiv (1, 2, 0), \quad B \equiv (0, -1, -1);$

OSSERVAZIONE. Sappiamo che c'è corrispondenza biunivoca tra i punti P del piano e le coppie (a, b) delle loro coordinate in un sistema di riferimento cartesiano fissato. C'è pure corrispondenza biunivoca tra i punti P del piano e i vettori \vec{OP} applicati nell'origine e aventi P come punto finale.

Il vettore \vec{OP} ha come componenti le coordinate di P , quindi se è $P \equiv (a, b)$, è anche $\vec{OP} = [a, b]$. Dunque:

$$P \equiv (a, b) \Leftrightarrow \vec{OP} = [a, b]$$

Costruiamo ora nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, (fig. 4.37)

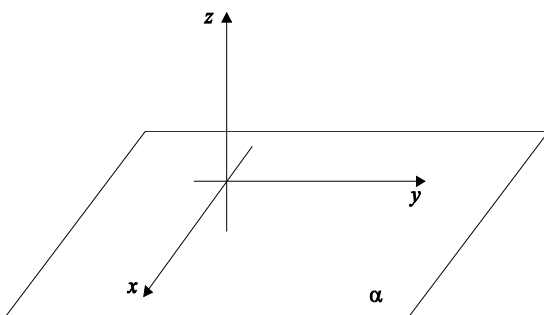


fig. 4.37

Fissiamo un piano α , e in tale piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale di assi x e y e origine O . Come abbiamo già visto esiste una e una sola retta passante per O e perpendicolare ad α . Fissiamo un orientamento su tale retta e una unità di misura uguale a quella già fissata per gli assi x e y .

È consuetudine scegliere l'orientamento dei tre assi come in figura.

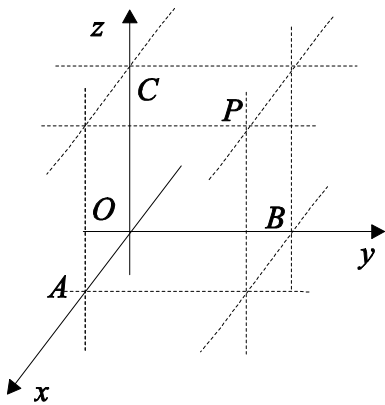


fig 4.38

Considerato un generico punto P dello spazio, consideriamo i tre piani passanti per P e perpendicolari rispettivamente all'asse x , all'asse y e all'asse z e siano A, B, C i tre punti di intersezione dei tre piani con gli assi.

I tre numeri reali a, b, c che individuano i tre punti A, B, C sui tre assi sono dette *coordinate* di P , si scrive $P \equiv (a, b, c)$ e sono detti rispettivamente *ascissa*, *ordinata*, *quota* di P (fig. 4.38).

sistema di riferimento nello spazio

Si indichino i tre versori degli assi coordinati rispettivamente con \mathbf{i}, \mathbf{j} e \mathbf{k} (fig. 4.39).

Per quanto già visto, ogni vettore \mathbf{v} si può esprimere (in modo unico), come somma delle sue proiezioni lungo tre rette incidenti e non complanari, come appunto i tre assi, e siano $\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y, \mathbf{v}_z$ le proiezioni di \mathbf{v} sui tre assi, risulta quindi $\mathbf{v}_x = a\mathbf{i}, \mathbf{v}_y = b\mathbf{j}, \mathbf{v}_z = c\mathbf{k}$.

Il vettore \mathbf{v} ha dunque componenti a, b, c e scriveremo $\mathbf{v} = [a, b, c]$.

? Quali sono in questo caso le componenti di \mathbf{i}, \mathbf{j} e \mathbf{k} ?

Anche nello spazio, posto

$$\mathbf{u} = [a, b, c] \text{ e } \mathbf{w} = [d, e, f]$$

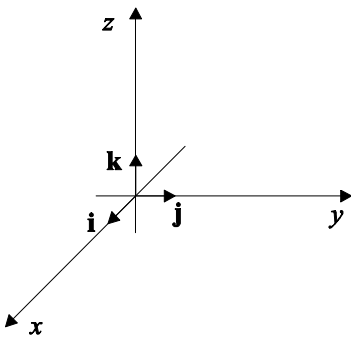


fig. 4.39

risulta:

$$\mathbf{u} + \mathbf{w} = [a, b, c] + [d, e, f] = [a + d, b + e, c + f]$$

$$k\mathbf{u} = k[a, b, c] = [ka, kb, kc] .$$

ESERCIZI:

A. Che cosa si può dire di un vettore che ha una delle due componenti nulle? E nel caso in cui siano entrambe nulle?

B. Disegnare i vettori applicati nell'origine di componenti cartesiane:

- $[1, 5];$ $[-2, 7];$ $[0, 3];$ $[1, -3];$ $[-1, -5];$
- $[0, 5];$ $[2, 2];$ $[0, -1];$ $[1, 3];$ $[1, -6];$
- $[1, -3];$ $[-2, -1];$ $[1, 3];$ $[1, 6];$ $[-1, 5];$
- $[1, 5];$ $[-2, 7];$ $[0, 3];$ $[1, -3];$ $[-1, -5];$

C. Esprimere nella forma $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ i seguenti vettori $\mathbf{v} = [AB]$:

- | | | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| • $A \equiv (0, 5)$ | • $B \equiv (-1, 3);$ | • $A \equiv (1, 1)$ | • $B \equiv (1, 3);$ |
| • $A \equiv (-1, -2)$ | • $B \equiv (0, 2).$ | • $A \equiv (-1, 3)$ | • $B \equiv (1, 3);$ |
| • $A \equiv (1, 0)$ | • $B \equiv (2, 1);$ | • $A \equiv (-1, -1)$ | • $B \equiv (0, -2);$ |
| • $A \equiv (0, -5)$ | • $B \equiv (2, -3);$ | • $A \equiv (1, -3)$ | • $B \equiv (1, -3);$ |
| • $A \equiv (-1, 1)$ | • $B \equiv (1, 2).$ | • $A \equiv (-1, 3)$ | • $B \equiv (1, -3);$ |
| • $A \equiv (1, 2)$ | • $B \equiv (0, 1);$ | • $A \equiv (-1, -1)$ | • $B \equiv (0, -2).$ |

D. Determinare le componenti di $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} - \frac{1}{2}\mathbf{w}$, $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $2\mathbf{u} + \mathbf{w}$ per ciascuno dei seguenti casi:

- $\mathbf{u} = [1, -3]$; $\mathbf{v} = [1, -4]$; $\mathbf{w} = [1, 4]$;
- $\mathbf{u} = [0, 3]$; $\mathbf{v} = [1, 0]$; $\mathbf{w} = [0, 4]$;
- $\mathbf{u} = [0, 0, 1]$; $\mathbf{v} = [1, 1, -1]$; $\mathbf{w} = [2, 0, 0]$;
- $\mathbf{u} = [0, 0, 3]$; $\mathbf{v} = [1, 0, 2]$; $\mathbf{w} = [0, 2, 4]$;
- $\mathbf{u} = [0, 3, 1]$; $\mathbf{v} = [1, 0, -1]$; $\mathbf{w} = [2, 1, 1]$;
- $\mathbf{u} = [1, -1, 3]$; $\mathbf{v} = [1, -1, 2]$; $\mathbf{w} = [0, 0, 4]$.

E. Completare la seguente tabella:

\mathbf{u}	\mathbf{v}	k	$\mathbf{u} + \mathbf{v}$	$\mathbf{u} - \mathbf{v}$	$\mathbf{v} - \mathbf{u}$	$k\mathbf{u}$	$k\mathbf{u} + \mathbf{v}$
[3, 5]	[0, 1]					[6, 10]	
[0, 1]			[2, 2]			[0, 3]	
	[1, 6]		[0, 1]				[-1, -4]
[1, 1]	[0, 1]					[2, 2]	
[0, 2]		3					[1, 4]

F. Dati i vettori $\mathbf{v}=[2, 1]$, $\mathbf{u}=[3, 1]$ e $\mathbf{w}=[4, -2]$, esprimere \mathbf{w} come combinazione lineare di \mathbf{u} e \mathbf{v} , cioè trovare due numeri h e k tali che sia $\mathbf{w} = h\mathbf{u}+k\mathbf{v}$.

6. UNA DIVERSA DEFINIZIONE DI VETTORE

La definizione "storica" di vettore ci ha portati a costruire, con una certa fatica, il calcolo vettoriale. Abbiamo già spiegato i motivi per cui questo approccio ci è sembrato opportuno: molto spesso gli enti matematici e le relazioni che li legano servono per formalizzare concetti che derivano da altre scienze, in questo caso dalla fisica.

Il matematico deve fare in modo che gli enti astratti che definisce rispecchino esattamente gli oggetti concreti che vuole descrivere, però poi può permettersi un grado di astrazione maggiore, introducendo le necessarie definizioni in modo più semplice, *anche se non è più visibile il processo storico*, purchè le proprietà siano conservate.

Presentiamo dunque nuovamente i vettori in modo astratto.

DEFINIZIONE Nel piano, chiamiamo *vettore* una qualunque coppia ordinata di numeri reali:

$$\mathbf{v} = [a_1, a_2] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Per ogni coppia di vettori $\mathbf{v} = [a_1, a_2]$ e $\mathbf{w} = [b_1, b_2]$, definiamo *somma*

$$\text{vettore } \mathbf{v} = [a, b]$$

Rispetto alla operazione di somma appena definita l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ risulta un gruppo commutativo, infatti:

- La somma è una operazione: se $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ e $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, anche $a_1 + b_1 \in \mathbb{R}$, $a_2 + b_2 \in \mathbb{R}$.
- La somma è *associativa*; comunque scelti $\mathbf{v} = [a_1, a_2]$, $\mathbf{w} = [b_1, b_2]$ e $\mathbf{u} = [c_1, c_2]$ risulta:
 $\mathbf{v} + (\mathbf{w} + \mathbf{u}) = [a_1, a_2] + [b_1 + c_1, b_2 + c_2] = [a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2]$
 $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{u} = [a_1 + b_1, a_2 + b_2] + [c_1, c_2] = [a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2]$.
- Esiste nell'insieme un *elemento neutro* rispetto alla somma: è il vettore

$$\mathbf{0} = [0, 0]$$

- Per ogni vettore $\mathbf{v} = [a_1, a_2]$ esiste un vettore *opposto*, cioè un vettore $-\mathbf{v}$ tale che $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = -\mathbf{v} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Risulta $-\mathbf{v} = [-a_1, -a_2]$
Quindi la *differenza* $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ di due vettori, che è per definizione la somma del primo vettore con l'opposto del secondo, posto $\mathbf{v}=[a_1, a_2]$, $\mathbf{w}=[b_1, b_2]$, risulta
 - $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w}) = [a_1, a_2] + [-b_1, -b_2] = [a_1 - b_1, a_2 - b_2]$.
- La somma è *commutativa*, infatti per ogni $\mathbf{v} = [a_1, a_2]$, $\mathbf{w} = [b_1, b_2]$ risulta

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = [a_1 + b_1, a_2 + b_2] = [b_1 + a_1, b_2 + a_2] = \mathbf{w} + \mathbf{v}$$

DEFINIZIONE Il *prodotto di un vettore* $\mathbf{v} = [a_1, a_2]$ per un numero reale k è il vettore

$$k\mathbf{v} = [ka_1, ka_2].$$

Chiaramente, se $\mathbf{v} = [a_1, a_2]$, allora $-\mathbf{v} = [-a_1, -a_2] = (-1)\mathbf{v}$.

ESEMPIO. Sapendo che $\mathbf{v} = [1, -1]$, $\mathbf{w} = [2, 3]$, $\mathbf{u} = [8, 7]$ determinare:

- (a) $\mathbf{v} - \mathbf{w}$; (b) $2\mathbf{v} + \mathbf{w}$; (c) $3\mathbf{v} - 7\mathbf{w}$; (d) $2\mathbf{v} + 3\mathbf{w} - \mathbf{u}$.

- (a) $\mathbf{v} - \mathbf{w} = [1, -1] - [2, 3] = [1-2, -1-3] = [-1, -4]$
 (b) $2\mathbf{v} + \mathbf{w} = 2[1, -1] + [2, 3] = [2, -2] + [2, 3] = [4, 1]$
 (c) $3\mathbf{v} - 7\mathbf{w} = 3[1, -1] - 7[2, 3] = [3, -3] - [14, 21] = [-11, -24]$
 (d) $2\mathbf{v} + 3\mathbf{w} - \mathbf{u} = 2[1, -1] + 3[2, 3] - [8, 7] = [2, -2] + [6, 9] - [8, 7]$
 $= [0, 0] = \mathbf{0}$.

ESERCIZIO Dimostrare che valgono le seguenti proprietà:

- $k(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = k\mathbf{v} + k\mathbf{w}$ (proprietà distributiva)
 $(k + h)\mathbf{v} = k\mathbf{v} + h\mathbf{v}$ (proprietà pseudodistributiva)
 $k(h\mathbf{v}) = (kh)\mathbf{v}$ (proprietà pseudoassociativa)
 $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$

L'insieme $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con le operazioni sopra introdotte risulta dunque essere uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{R} dei numeri reali.

In modo del tutto analogo, nello spazio,

DEFINIZIONE Nel piano, chiamiamo *vettore* una qualunque coppia ordinata di numeri reali:

$$\mathbf{v} = [a_1, a_2, a_3] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Per ogni coppia di vettori $\mathbf{v} = [a_1, a_2, a_3]$ e $\mathbf{w} = [b_1, b_2, b_3]$, definiamo *somma* di \mathbf{v} e \mathbf{w} il vettore

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w} = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3].$$

Il *prodotto di un vettore* $\mathbf{v} = [a_1, a_2, a_3]$ per un numero reale k è il vettore

vettore nello spazio $\mathbf{v}=[a,b,c]$

L'insieme $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con le operazioni sopra introdotta risulta essere uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{R} dei numeri reali.

9. PRODOTTO SCALARE.

Introduciamo ora una nuova operazione nell'insieme dei vettori, il prodotto scalare. È una operazione completamente diversa dalla somma di vettori,

poiché il risultato dell'operazione non è un vettore: il prodotto scalare associa ad ogni coppia di vettori un numero reale.

Anche in questo caso preferiamo introdurre la definizione "storica" di prodotto scalare che è la seguente:

DEFINIZIONE Dati due vettori \mathbf{v} e \mathbf{w} , si definisce prodotto scalare tra i due vettori il numero reale:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\| \cos \theta$$

(ove θ è l'angolo non concavo tra \mathbf{v} e \mathbf{w}).

prodotto scalare

OSSERVAZIONE. Se uno dei due vettori fosse il vettore nullo, l'angolo θ sarebbe indeterminato, d'altra parte il modulo del vettore nullo è 0, quindi il prodotto scalare vale 0 indipendentemente dal valore di θ .

collegamenti: IL PRODOTTO SCALARE IN FISICA

Il prodotto scalare di due vettori, che è un numero e non un vettore, risulta utile in fisica quando si vuole descrivere l'efficacia di un vettore lungo la direzione di un altro vettore. Ad esempio il **lavoro** (L) è il prodotto scalare del vettore forza (\vec{F}) e del vettore spostamento (\vec{s}); nel caso più semplice,

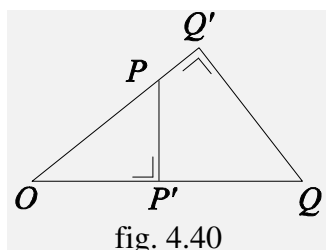


fig. 4.40

se la direzione e il verso di \vec{F} sono gli stessi di \vec{s} allora $L = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{s}\|$; ma se \vec{F} e \vec{s} hanno direzioni diverse allora ci interessa sapere qual è la componente (cioè l'efficacia) di \vec{F} lungo la direzione di \vec{s} ; il prodotto scalare è allora il prodotto del modulo di \vec{s} per il modulo (F_{\parallel}) della proiezione di \vec{F} lungo la direzione di \vec{s} ; si può dimostrare facilmente (mediante la similitudine dei due triangoli) che si ottiene lo stesso risultato se si calcola il lavoro come prodotto di $\|\vec{F}\|$ per s_{\parallel} .

Bisogna infatti dimostrare che $OP' \cdot OQ = OP \cdot OQ'$, cioè che $\frac{OP'}{OP} = \frac{OQ'}{OQ}$, ma questo è vero perché sono cateto e ipotenusa di triangoli rettangoli simili (fig. 4.40).

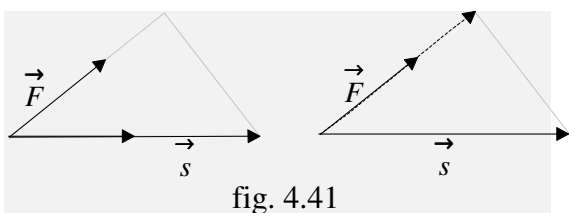


fig. 4.41

Se si conoscono le funzioni trigonometriche è facile rendersi conto che la definizione di lavoro può essere riassunta nella relazione

$$L = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{s}\| \cdot \cos \theta$$

dove θ è l'angolo tra i due vettori (fig. 4.41)

Risulta chiaro allora che se due vettori sono perpendicolari il loro prodotto scalare è nullo poiché $\cos 90^\circ = 0$, e infatti l'uno ha proiezione nulla (cioè non ha alcuna efficacia) nella direzione dell'altro. Se invece i due vettori sono paralleli il loro prodotto scalare è il prodotto dei moduli, con segno positivo se i vettori hanno lo stesso verso ($\theta = 0$), con segno negativo se hanno verso opposto ($\theta = 180^\circ$).

Vediamo le prime proprietà del prodotto scalare di due vettori, che si deducono dalla definizione.

- Il prodotto scalare di due vettori \mathbf{v} e \mathbf{w} è nullo se almeno uno dei due vettori è nullo oppure se $\cos \theta = 0$ ($\theta = 90^\circ$), cioè se \mathbf{v} e \mathbf{w} hanno direzioni perpendicolari.
- Dalla formula $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\| \cos \theta$ si ricava

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|}$$

- Osservando che $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$ si ha anche

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \quad \text{e quindi} \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$$

? Se $P \equiv (3, 0)$ e $Q \equiv (1, 1)$ quanto vale $\vec{OP} \cdot \vec{OQ}$? e $\|\vec{OP}\|$

- Supponiamo che \mathbf{v} sia un *versore*, cioè un vettore di modulo 1. Allora $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{w}\| \cos \theta$, quindi il prodotto scalare dà la lunghezza della proiezione di \mathbf{w} nella direzione di \mathbf{v} (fig. 4.42).

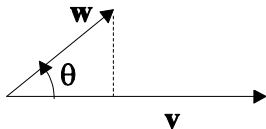


fig. 4.42

- Il prodotto scalare è *commutativo*, cioè per ogni coppia di vettori \mathbf{v} e \mathbf{w} risulta

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$$

- Per i tre versori degli assi valgono le relazioni

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0$$

poiché, per esempio, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \|\mathbf{i}\| \cdot \|\mathbf{i}\| \cos 0 = 1$ ecc. e i tre versori sono a due a due ortogonali.

- NON** vale la proprietà associativa, ma *non ha neppure senso* poiché se osserviamo l'operazione $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u}$, il prodotto scalare tra parentesi dà come risultato un numero reale, che non può essere moltiplicato scalarmente per un vettore.

OSSERVAZIONE Questa considerazione si deve fare, più in generale, quando si studiano le proprietà di una legge di composizione *non interna*, cioè che associa ad ogni coppia di elementi di un insieme un elemento che non sta nello stesso insieme. Una tale legge si può applicare solo una volta: la seconda non è più definita.

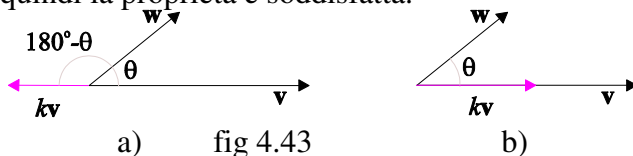
- Per ogni coppia di vettori \mathbf{v} e \mathbf{w} e per ogni numero reale k risulta

$$k(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = (k\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}.$$

Per dimostrare questa proprietà dobbiamo distinguere tre casi:

$k < 0$ (fig.4.43 a), $k > 0$ (fig.4.43b) e $k = 0$.

Se $k = 0$ si ha: $0(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = 0$ al primo membro e $(0\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{w} = 0$ al secondo, quindi la proprietà è soddisfatta.



a) fig 4.43

b)

Se $k < 0$, $k\mathbf{v}$ ha verso opposto rispetto a \mathbf{v} , quindi se l'angolo che \mathbf{v} forma con \mathbf{w} è θ , quello di $k\mathbf{v}$ è $180^\circ - \theta$ e risulta $\cos \theta = -\cos(180^\circ - \theta)$.

Dobbiamo dunque dimostrare che

$$k(\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\| \cos \theta) = \|k\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\| \cos(180^\circ - \theta)$$

Ma è $\|k\mathbf{v}\| = -k\|\mathbf{v}\|$ perché $|k| = -k$ per cui la proprietà è dimostrata.

Se $k > 0$ infine \mathbf{v} e $k\mathbf{v}$ formano lo stesso angolo con \mathbf{w} e risulta $\|k\mathbf{v}\| = k\|\mathbf{v}\|$, per cui anche in questo caso la proprietà è dimostrata.

- Vale la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma, cioè comunque scelti tre vettori \mathbf{w} , \mathbf{v} , \mathbf{u} risulta

$$(\mathbf{w} + \mathbf{v}) \times \mathbf{u} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{u})$$

La dimostrazione di questa proprietà richiede teoremi di trigonometria che coinvolgono il calcolo del coseno di somme di angoli; rimandiamo quindi la dimostrazione a quando questa teoria sarà nota.

La proprietà distributiva è fondamentale per poter introdurre il calcolo del prodotto scalare di due vettori attraverso le loro componenti. Vediamo prima il caso piano, anche se quanto detto sino a questo momento sul prodotto scalare vale sia che i due vettori \mathbf{v} e \mathbf{w} siano pensati nel piano o nello spazio (sono del resto comunque *in un piano*, se si pensa ai loro rappresentanti applicati in uno stesso punto).

Si considerino dunque i due vettori $\mathbf{v} = [a, b]$ e $\mathbf{w} = [c, d]$.

Sappiamo che la scrittura precedente significa $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ e $\mathbf{w} = c\mathbf{i} + d\mathbf{j}$ ove \mathbf{i} e \mathbf{j} sono i versori degli assi coordinati, per i quali valgono le relazioni $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 1$ e $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = 1$, mentre $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{j} \times \mathbf{i} = 0$.

Allora risulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{w} &= (a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) \times (c\mathbf{i} + d\mathbf{j}) = a\mathbf{i} \times (c\mathbf{i} + d\mathbf{j}) + b\mathbf{j} \times (c\mathbf{i} + d\mathbf{j}) \\ &= a\mathbf{i} \times c\mathbf{i} + a\mathbf{i} \times d\mathbf{j} + b\mathbf{j} \times c\mathbf{i} + b\mathbf{j} \times d\mathbf{j} \\ &= ac(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + ad(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + bc(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + bd(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = ac + bd. \end{aligned}$$

$\mathbf{v} = [a, b], \mathbf{w} = [c, d]$ $\Rightarrow \mathbf{v} \times \mathbf{w} = ac + bd$
--

Nel caso dello spazio consideriamo i due vettori $\mathbf{v} = [a, b, c]$ e $\mathbf{w} = [m, n, p]$, cioè $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = m\mathbf{i} + n\mathbf{j} + p\mathbf{k}$. Con un procedimento del tutto analogo (e un po' più di conti) si ottiene

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = am + bn + cp.$$

La formula che dà il prodotto scalare di due vettori a partire dalle loro componenti è semplicissima, tanto che da molti è utilizzata come *definizione* di prodotto scalare. Anche in questo caso ci è sembrato opportuno mostrare come nasce una tale definizione, per le stesse considerazioni già svolte.

ESERCIZI

A. Calcolare:

- | | |
|--------------------------------|-------------------------------|
| • $[3, 2] \times [5, -8]$; | • $[3, 0] \times [-5, -18]$; |
| • $[-2, -2] \times [-3, -6]$; | • $[3, 5] \times [-5, 3]$; |
| • $[-4, 2] \times [4, 8]$; | • $[5, 7] \times [-3, 8]$; |
| • $[0, 2] \times [5, -3]$; | • $[3, -3] \times [-8, -3]$; |
| • $[3, 8] \times [-4, 4]$; | • $[3, 7] \times [-5, 1]$. |

B. Calcolare:

- | | |
|--------------------------------------|-------------------------------------|
| • $[3, 2, -2] \times [5, -8, 1]$; | • $[0, 3, 0] \times [2, -5, -18]$; |
| • $[-2, -2, 0] \times [1, -3, -6]$; | • $[3, 5, 1] \times [-5, -2, 3]$; |
| • $[-4, 2, 5] \times [4, 8, -2]$; | • $[5, 7, 3] \times [2, -3, 8]$; |
| • $[0, 2, -1] \times [1, 5, -3]$; | • $[3, -3, 5] \times [-8, 0, -3]$; |
| • $[3, 8, -2] \times [-4, 4, 5]$; | • $[3, 7, -1] \times [-5, 1, 8]$. |

C. Trovare b in modo che il vettore \mathbf{v} sia perpendicolare al vettore \mathbf{w} :

- | | |
|---|--|
| • $\mathbf{v} = [2, b]; \mathbf{w} = [1, -3]$; | • $\mathbf{v} = [b, -b]; \mathbf{w} = [-5, -18]$; |
|---|--|

- $\mathbf{v} = [b, -3]; \mathbf{w} = [1, -3b];$
- $\mathbf{v} = [2b, b]; \mathbf{w} = [1, -2];$
- $\mathbf{v} = [2, b]; \mathbf{w} = [b, -3b];$
- $\mathbf{v} = [2, b, -b]; \mathbf{w} = [1, -3, -b];$
- $\mathbf{v} = [b, 6]; \mathbf{w} = [-5, 2b];$
- $\mathbf{v} = [b, -6b]; \mathbf{w} = [-5, 2];$
- $\mathbf{v} = [b, -b]; \mathbf{w} = [b, -1];$
- $\mathbf{v} = [b, -b, 2]; \mathbf{w} = [-5, -2b, 1].$

D. Dati i due punti P e Q calcolare $[\vec{OP}] \times [\vec{OQ}]$, $[\vec{OP}] \times [\vec{PQ}]$, $[\vec{OQ}] \times [\vec{PQ}]$, $\|\vec{PQ}\|$, ove P e Q siano:

- $P \equiv (1, 1), Q \equiv (-3, 6);$
- $P \equiv (1, 5), Q \equiv (-3, 3);$
- $P \equiv (-2, 4), Q \equiv (2, 6);$
- $P \equiv (3, -1, 1), Q \equiv (-3, 4, 2);$
- $P \equiv (1, 1, 0), Q \equiv (-3, 6, 9);$
- $P \equiv (1, -1), Q \equiv (3, -4);$
- $P \equiv (1, -10), Q \equiv (4, 1);$
- $P \equiv (5, -1), Q \equiv (2, -4);$
- $P \equiv (1, 7, 0), Q \equiv (-3, 2, 1);$
- $P \equiv (5, 3, -1), Q \equiv (2, 4, -4).$

E. Dati i due vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} determinare la lunghezza della proiezione di \mathbf{u} nella direzione di \mathbf{v} :

- $\mathbf{v} = [1, 0], \mathbf{u} = [3, -2];$
- $\mathbf{v} = [0, 1, 0], \mathbf{u} = [1, 3, -2];$
- $\mathbf{v} = [1, 0, -1], \mathbf{u} = [3, -2, 3];$
- $\mathbf{v} = [1, 2], \mathbf{u} = [3, -1];$
- $\mathbf{v} = [1, -1], \mathbf{u} = [4, -2];$
- $\mathbf{v} = [1, 0], \mathbf{u} = [-5, -2];$
- $\mathbf{v} = [1, 0, 0], \mathbf{u} = [-5, -2, 7];$
- $\mathbf{v} = [0, 0, 1], \mathbf{u} = [4, -5, -2];$
- $\mathbf{v} = [1, 1], \mathbf{u} = [-5, 2];$
- $\mathbf{v} = [1, 1], \mathbf{u} = [-1, -1].$

(nel caso in cui $\|\mathbf{v}\|$ sia diverso da 0 come si può legare la proiezione di \mathbf{u} nella direzione di \mathbf{v} a $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$?)

F. Dati \mathbf{v} , \mathbf{u} ed \mathbf{w} calcolare le seguenti espressioni:

- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} + 3\mathbf{u} \times 5\mathbf{w};$
- $\frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times 3(\mathbf{w} + \mathbf{v});$
- $(\mathbf{w} + \mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{u} + 2\mathbf{u} \times \mathbf{w} + 3\mathbf{v} \times \mathbf{u};$
- $(3\mathbf{u} - \mathbf{v} - 2\mathbf{w}) \times 2(3\mathbf{v} - 2\mathbf{w});$

ove siano:

- $\mathbf{v} = [1, 0], \mathbf{u} = [3, -2], \mathbf{w} = [1, -2];$
- $\mathbf{v} = [0, 1, 0], \mathbf{u} = [1, 3, -2], \mathbf{w} = [1, -2, 3];$
- $\mathbf{v} = [1, 0, -1], \mathbf{u} = [3, -2, 3], \mathbf{w} = [1, 3, -2];$
- $\mathbf{v} = [1, 2], \mathbf{u} = [3, -1], \mathbf{w} = [0, -2];$
- $\mathbf{v} = [1, -1], \mathbf{u} = [4, -2], \mathbf{w} = [-1, -3];$
- $\mathbf{v} = [1, 0], \mathbf{u} = [-5, -2], \mathbf{w} = [-1, -2];$
- $\mathbf{v} = [1, 0, 0], \mathbf{u} = [-5, -2, 7], \mathbf{w} = [1, -1, -2];$
- $\mathbf{v} = [0, 0, 1], \mathbf{u} = [4, -5, -2], \mathbf{w} = [1, -2, 2];$
- $\mathbf{v} = [1, 1], \mathbf{u} = [-5, 2], \mathbf{w} = [-1, -2];$
- $\mathbf{v} = [1, 1], \mathbf{u} = [-1, -1], \mathbf{w} = [-1, -2].$

G. Dati \mathbf{u} e \mathbf{v} di cui sia noto il modulo e l'angolo da essi formato calcolare:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v}; \quad (\mathbf{u} + 2\mathbf{v}) \times \mathbf{v}; \quad (3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}) \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}); \quad (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \times \mathbf{v};$$

dove siano:

- $\|\mathbf{u}\| = 1, \|\mathbf{v}\| = 2, \alpha = 30^\circ;$
- $\|\mathbf{u}\| = 2, \|\mathbf{v}\| = 2\sqrt{3}, \alpha = 60^\circ;$
- $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2}, \|\mathbf{v}\| = 2, \alpha = 45^\circ;$
- $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{3}, \|\mathbf{v}\| = 2, \alpha = 90^\circ.$

10. MODULO DI UN VETTORE E SUE PROPRIETÀ

Utilizziamo le componenti dei vettori per calcolare il modulo di un vettore e l'angolo tra vettori.

Il *modulo* del vettore $\mathbf{v} = [a, b]$ è il numero reale positivo

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \times \mathbf{v}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

È il solito
teorema di Pitagora!

In alcuni testi, soprattutto universitari, il modulo di un vettore è più spesso chiamato **norma**.

Il modulo così definito gode delle seguenti proprietà:

- $\|\mathbf{v}\| > 0$ per ogni $\mathbf{v} \neq 0$ e $\|\mathbf{v}\| = 0$ se e solo se $\mathbf{v} = 0$
- $\|k\mathbf{v}\| = |k| \cdot \|\mathbf{v}\|$, per ogni vettore \mathbf{v} e per ogni numero reale k .

Infatti è $\|k\mathbf{v}\| = \sqrt{k\mathbf{v} \times k\mathbf{v}} = \sqrt{k^2 \sqrt{\mathbf{v} \times \mathbf{v}}} = |k| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

- $|\mathbf{v} \times \mathbf{w}| \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$ (disuguaglianza di Cauchy–Schwarz)

disuguaglianza di Cauchy–Schwarz

Il segno = vale se almeno uno dei due vettori è nullo o se i due vettori hanno la stessa direzione.

Infatti $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \cos \theta$ ed è $|\cos \theta| \leq 1$.

- $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ (disuguaglianza triangolare).

disuguaglianza triangolare

È così chiamata perchè esprime il fatto che in un triangolo (di lati \mathbf{v} , \mathbf{w} e $\mathbf{v} + \mathbf{w}$) la lunghezza di un lato è minore della somma delle lunghezze degli altri due.

Anche in questo caso il segno = vale solo se almeno uno dei due vettori è nullo o se i due vettori hanno la stessa direzione, e in questo caso, il triangolo risulta degenerare.

La dimostrazione si basa sulla disuguaglianza di Cauchy–Schwarz. Mostriamo che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 \leq (\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|)^2$, che è la stessa relazione in cui si sono elevati al quadrato entrambi i membri, cosa lecita perchè sono entrambi positivi.

Primo membro: risulta

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = (\mathbf{v} + \mathbf{w})'(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{v}'\mathbf{v}) + (\mathbf{w}'\mathbf{w}) + 2(\mathbf{v}'\mathbf{w}) = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 + 2(\mathbf{v}'\mathbf{w})$$

Secondo membro: risulta

$$(\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|)^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|.$$

Per la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz è $2(\mathbf{v}'\mathbf{w}) \leq 2\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|$ per cui la condizione è soddisfatta.

Detto θ l'angolo tra $\mathbf{v} = [a,b]$ e $\mathbf{w} = [c,d]$ risulta:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|} = \frac{ac + bd}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2}}$$

coseno dell'angolo tra due vettori

Del tutto analoghe sono le relazioni corrispondenti nello spazio.

Il *modulo* del vettore $\mathbf{v} = [a,b,c]$ è il numero reale positivo $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \times \mathbf{v}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, e questa può vedersi come una generalizzazione del teorema di Pitagora (fig.4.26)

Il coseno dell'angolo q tra $\mathbf{v} = [a,b,c]$ e $\mathbf{w} = [d,e,f]$ vale

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|} = \frac{ad + be + cf}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{d^2 + e^2 + f^2}}$$

ESERCIZI

A. Verificare la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz con:

- | | | | |
|-----------------------------|---------------------------|----------------------------|----------------------------|
| • $\mathbf{v}=[1, 2]$, | $\mathbf{u}=[2, 3]$; | • $\mathbf{v}=[1, 3]$, | $\mathbf{u}=[-2, -6]$; |
| • $\mathbf{v}=[1, 0, -1]$, | $\mathbf{u}=[3, -2, 3]$; | • $\mathbf{v}=[0, 0, 1]$, | $\mathbf{u}=[4, -5, -2]$; |
| • $\mathbf{v}=[1, 2]$, | $\mathbf{u}=[3, -1]$; | • $\mathbf{v}=[1, 1]$, | $\mathbf{u}=[-5, 2]$; |
| • $\mathbf{v}=[1, -1, 4]$, | $\mathbf{u}=[1, 4, -2]$; | • $\mathbf{v}=[1, 1]$, | $\mathbf{u}=[-1, -1]$. |

B. Verificare la disuguaglianza triangolare con:

- $\mathbf{v}=[2, 2], \quad \mathbf{u}=[2, 4];$
- $\mathbf{v}=[3, 0, -1], \quad \mathbf{u}=[1, -2, 3];$
- $\mathbf{v}=[1, -2], \quad \mathbf{u}=[3, 4];$
- $\mathbf{v}=[-1, 1, 4], \quad \mathbf{u}=[1, -4, -2];$
- $\mathbf{v}=[-1, 2], \quad \mathbf{u}=[2, -4];$
- $\mathbf{v}=[-1, 3, 1], \quad \mathbf{u}=[4, -3, 2];$
- $\mathbf{v}=[1, 2], \quad \mathbf{u}=[-3, 2];$
- $\mathbf{v}=[1, 6], \quad \mathbf{u}=[2, -1].$

C. Calcolare il coseno e l'ampiezza dell'angolo tra i due vettori \mathbf{v} ed \mathbf{u} :

- $\mathbf{v}=[1, 2], \quad \mathbf{u}=[3, 1];$
- $\mathbf{v}=[1, 2], \quad \mathbf{u}=[2, 3];$
- $\mathbf{v}=[1, 0, -1], \quad \mathbf{u}=[3, -2, 3];$
- $\mathbf{v}=[1, 2], \quad \mathbf{u}=[3, -1];$
- $\mathbf{v}=[1, -1, 4], \quad \mathbf{u}=[1, 4, -2];$
- $\mathbf{v}=[1, 3], \quad \mathbf{u}=[0, -6];$
- $\mathbf{v}=[1, 3], \quad \mathbf{u}=[-2, -6];$
- $\mathbf{v}=[0, 0, 1], \quad \mathbf{u}=[4, -5, -2];$
- $\mathbf{v}=[1, 1], \quad \mathbf{u}=[-5, 2];$
- $\mathbf{v}=[1, 1], \quad \mathbf{u}=[-1, -1].$

D. Calcolare il coseno e l'ampiezza dell'angolo tra i due vettori $[AB]$ e $[CD]$:

- $A \equiv (1, 1), \quad B \equiv (3, -1), \quad C \equiv (2, -3), \quad D \equiv (0, 1);$
- $A \equiv (1, -1), \quad B \equiv (0, 1), \quad C \equiv (-2, -1), \quad D \equiv (5, 1);$
- $A \equiv (-5, 1), \quad B \equiv (3, 1), \quad C \equiv (2, -3), \quad D \equiv (2, -1);$
- $A \equiv (1, -1), \quad B \equiv (3, -1), \quad C \equiv (2, -3), \quad D \equiv (1, -3);$
- $A \equiv (2, 1), \quad B \equiv (3, -1), \quad C \equiv (2, 3), \quad D \equiv (4, 1);$
- $A \equiv (1, 1, 4), \quad B \equiv (2, 3, -1), \quad C \equiv (1, 2, -3), \quad D \equiv (0, 0, 1);$
- $A \equiv (1, -1, 2), \quad B \equiv (-2, 3, -1), \quad C \equiv (1, 2, -3), \quad D \equiv (1, 0, 1);$
- $A \equiv (-1, 1, 2), \quad B \equiv (2, 3, -1), \quad C \equiv (1, 2, -1), \quad D \equiv (0, 1, 1);$
- $A \equiv (2, 1, 3), \quad B \equiv (2, 3, 1), \quad C \equiv (1, -2, -3), \quad D \equiv (2, 1, 1);$
- $A \equiv (-1, 1, 2), \quad B \equiv (2, -3, 1), \quad C \equiv (-1, 2, 3), \quad D \equiv (3, 0, 1).$

Divagazione: IL PRODOTTO VETTORIALE

Consideriamo un corpo a cui siano applicate due forze individuate, come nella figura, da due vettori paralleli e di ugual modulo, non equiversi. Sappiamo che la somma di tali vettori è il vettore nullo, ma è chiaro che il corpo, pur non spostandosi in nessuno dei due versi, non rimane in quiete, ma ruota finché le due forze non risultano avere la stessa retta di applicazione. Il *momento* di una forza (o di più forze) "misura" tale rotazione, ed è rappresentato da un vettore diretto come l'asse di rotazione.

Dunque un corpo, cui siano applicate più forze, rimane in equilibrio se sono nulli sia il risultante delle forze (cioè la somma dei vettori che rappresentano le forze) che il momento delle forze stesse. Vediamo come è possibile rappresentare tale momento: nell'esempio il momento di \vec{F}_1 ha come modulo il prodotto del modulo di \vec{F}_1 per il modulo del vettore \vec{OP} (*braccio* di \vec{F}_1), come direzione quella della retta perpendicolare al piano di \vec{F}_1 e di \vec{OP} .

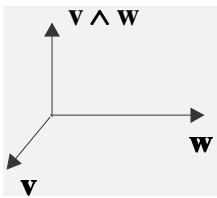
Definiamo più precisamente tale operazione tra vettori, che prende il nome di prodotto vettoriale.

DEFINIZIONE. Siano \mathbf{v} e \mathbf{w} due vettori dello spazio tridimensionale. Chiamiamo *prodotto vettoriale* di \mathbf{v} e \mathbf{w} e indichiamo con $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ il vettore \mathbf{u} così individuato:

modulo: $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \sin\theta$ (ove θ è l'angolo tra \mathbf{v} e \mathbf{w})

direzione: ortogonale al piano di \mathbf{v} e \mathbf{w}

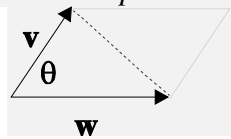
verso: la terna $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}$ deve risultare *destrorsa* cioè i tre vettori, nell'ordine, devono potersi disporre come pollice, indice e medio della mano destra. (vedi figura).



Dalla definizione seguono immediatamente alcune proprietà del prodotto vettoriale:

- il prodotto vettoriale di due vettori è ancora un vettore, quindi il prodotto vettoriale è una operazione interna.

- il prodotto vettoriale si annulla, oltre al caso banale in cui \mathbf{v} o \mathbf{w} siano nulli, quando i due vettori sono *paralleli*; in quanto $\sin 0 = \sin 180^\circ = 0$.



- il modulo del prodotto vettoriale tra due vettori \mathbf{v} e \mathbf{w} è l'area del parallelogramma che ha come lati adiacenti \mathbf{v} e \mathbf{w} , infatti, per il teorema dei seni, la metà di tale modulo è l'area di ciascuno dei due triangoli in figura.

- Per i versori degli assi coordinati risulta
 $\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{0}$,
 $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j}$,
 $\mathbf{j} \wedge \mathbf{i} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{k} \wedge \mathbf{j} = -\mathbf{i}$, $\mathbf{i} \wedge \mathbf{k} = -\mathbf{j}$.
- è *anticommutativo*, cioè risulta $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$.
- non è associativo; infatti ad esempio $(\mathbf{i} \wedge \mathbf{i}) \wedge \mathbf{j} = \mathbf{0} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{0}$, mentre $\mathbf{i} \wedge (\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}) = \mathbf{i} \wedge \mathbf{k} = -\mathbf{j}$.
- non può esistere elemento neutro, poichè il prodotto vettoriale di due vettori, se non è il vettore nullo, non appartiene sicuramente al piano dei due fattori, quindi non può coincidere con uno di essi.
- vale la proprietà distributiva rispetto al prodotto per uno scalare: $k\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{v} \wedge k\mathbf{w} = k(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$.
- vale la proprietà distributiva rispetto alla somma (la dimostrazione è piuttosto complessa e richiede formule di trigonometria che non sono state introdotte, per cui la omettiamo).

Le proprietà suddette consentono il calcolo del prodotto vettoriale di due vettori \mathbf{v} e \mathbf{w} dati mediante le componenti: siano infatti $\mathbf{v} = [a, b, c] = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = [m, n, p] = m\mathbf{i} + n\mathbf{j} + p\mathbf{k}$. Allora risulta

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} &= (a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}) \wedge (m\mathbf{i} + n\mathbf{j} + p\mathbf{k}) \\ &= a\mathbf{i} \wedge m\mathbf{i} + b\mathbf{j} \wedge m\mathbf{i} + c\mathbf{k} \wedge m\mathbf{i} + a\mathbf{i} \wedge n\mathbf{j} + b\mathbf{j} \wedge n\mathbf{j} + c\mathbf{k} \wedge n\mathbf{j} + a\mathbf{i} \wedge p\mathbf{k} + b\mathbf{j} \wedge p\mathbf{k} + c\mathbf{k} \wedge p\mathbf{k} \\ &= -bm\mathbf{k} + cm\mathbf{j} + an\mathbf{k} - cn\mathbf{i} - ap\mathbf{j} + bp\mathbf{i} \\ &= (bp - cn)\mathbf{i} + (cm - ap)\mathbf{j} + (an - bm)\mathbf{k} \end{aligned}$$

PROFILO STORICO

Il termine "vettore" e lo studio sistematico delle relative proprietà inizia essenzialmente con le ricerche del grande matematico irlandese Sir **William Rowan Hamilton** (1805–1865). Tuttavia, il riconoscimento dell'esistenza di "grandezze" fisiche e matematiche, il cui comportamento rispetto alle operazioni di "somma" e di "prodotto" è diverso da quello dei numeri, è di gran lunga anteriore.

Com'è noto dalla fisica, la somma di due vettori aventi un punto come origine comune viene definita come il vettore che ha come origine lo stesso punto comune e che si estende fino al vertice opposto del parallelogramma individuato dai due vettori iniziali. Le velocità e le forze sono, appunto, esempi di grandezze il cui comportamento si può rappresentare in questo modo.

Il concetto di parallelogramma delle velocità è già presente nelle opere di antichi autori greci [in particolare, in quelle di **Archimede** di Siracusa (~287 a.C.–212 a.C.) e di **Erone** di Alessandria (tra il I e il II secolo d.C.)], mentre il parallelogramma delle forze fa la sua comparsa negli scritti degli scienziati del XVI e del XVII secolo [tra i quali, di fondamentale importanza sia per la fisica

che per la matematica, i *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687) dell'inglese **Isaac Newton** (1642–1727)]. Dal XIX secolo diventa sempre più frequente l'uso del parallelogrammo per rappresentare la somma di certe grandezze fisiche e questo uso porta indirettamente ai concetti di vettore e di spazio vettoriale.

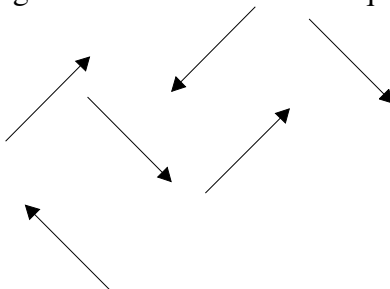
Sul versante matematico, il precursore dell'uso dei vettori per rappresentare proprietà geometriche è indubbiamente il grande scienziato e filosofo tedesco **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646–1716), le cui idee relative a una nuova "algebra geometrica", sia pure espresse in modo informale e non rigoroso, hanno una diretta influenza sul matematico Grassmann. Inoltre, occorre ricordare che la rappresentazione geometrica dei numeri complessi, espressi algebricamente mediante una coppia ordinata di numeri reali, conduce direttamente ai vettori del piano. A tale rappresentazione geometrica dà il suo autorevole contributo colui che è giustamente considerato il più grande matematico del suo tempo, **Carl Friedrich Gauss** (1777–1855).

È appunto il tentativo di generalizzare le proprietà dei numeri complessi allo spazio tridimensionale che porta W.R. Hamilton alla scoperta dei quaternioni (1843), i veri precursori degli attuali vettori. Nello stesso anno (1844), durante il quale Hamilton pubblica il suo primo articolo sui quaternioni, viene dato alle stampe il fondamentale trattato *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* (La teoria dell'estensione lineare, una nuova branca della matematica) del matematico polacco **Hermann Gunther Grassmann** (1809–1877), in cui compaiono, in una forma molto vicina a quella attuale, i concetti di "prodotto scalare" e di "prodotto vettoriale".

Tutti questi contributi trovano, infine, la loro sistemazione e formalizzazione nel libro del fisico americano **Josiah Willard Gibbs** (1839–1903) intitolato *Elements of Vector Analysis* (pubblicato una prima volta nel 1881 e una seconda volta nel 1884), che segna l'inizio della moderna teoria matematica dei vettori.

ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE:

1. A quanti vettori danno luogo due punti distinti A e B ?
2. Stabilire quali fra i seguenti segmenti orientati risultano equipollenti:



3. Dati i seguenti punti A , B e C determinare il punto D tale che $(A,B) \sim (C,D)$:

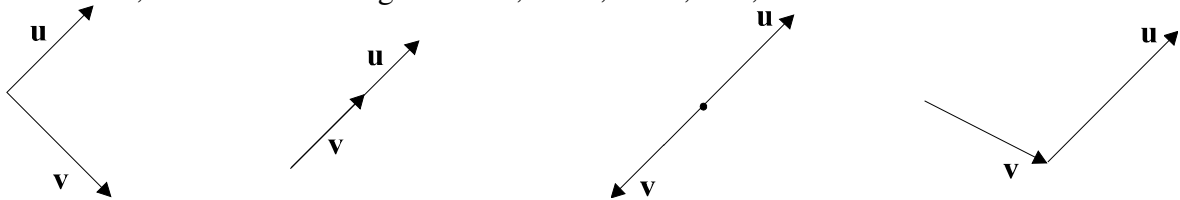
- | | | |
|-----------------------|---------------------|----------------------|
| • $A \equiv (1, 1)$ | $B \equiv (2, 3)$ | $C \equiv (-2, 1)$; |
| • $A \equiv (3, 0)$ | $B \equiv (0, 1)$ | $C \equiv (5, 2)$; |
| • $A \equiv (-6, 1)$ | $B \equiv (4, 2)$ | $C \equiv (5, 0)$; |
| • $A \equiv (0, 1)$ | $B \equiv (-2, -1)$ | $C \equiv (0, -1)$; |
| • $A \equiv (5, 0)$ | $B \equiv (1, -3)$ | $C \equiv (0, 5)$; |
| • $A \equiv (-1, -1)$ | $B \equiv (-1, 2)$ | $C \equiv (2, -1)$. |

4. Due segmenti orientati che siano l'uno il corrispondente dell'altro in una simmetria centrale sono equipollenti? E se si corrispondono in una simmetria assiale? Motivare le risposte tenendo conto di tutte le possibili posizioni dei segmenti rispetto al centro (o all'asse) di simmetria.

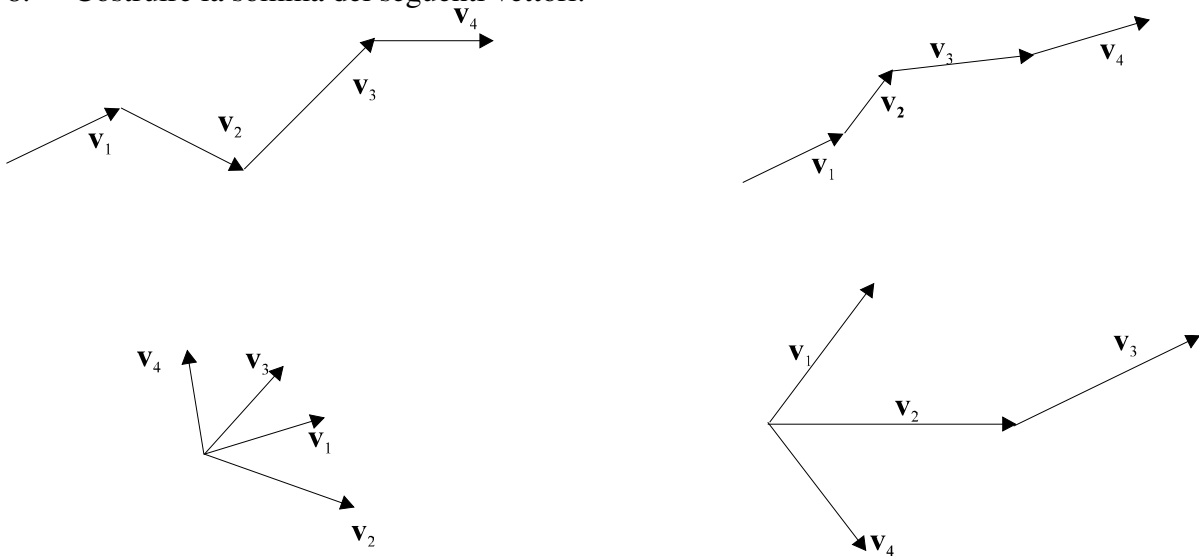
5. Dati i punti $A \equiv (0, 0)$, $B \equiv (3, 0)$, $C \equiv (1, 3)$, $D \equiv (4, 3)$, $E \equiv (-2, 3)$ individuare tutti i segmenti equipollenti non nulli che si possono costruire aventi tali punti come estremi.

6. Quante coppie di segmenti equipollenti si possono costruire prendendo, in ordine opportuno, come estremi i punti $A \equiv (0, 1)$, $B \equiv (3, -1)$, $C \equiv (-1, 5)$ ed un quarto punto da determinare? Individuare tutte le possibilità, prendendo in considerazione un'opportuna costruzione geometrica.

7. Costruire, in ciascuno dei seguenti casi, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{v} + \mathbf{u}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $\mathbf{v} - \mathbf{u}$:

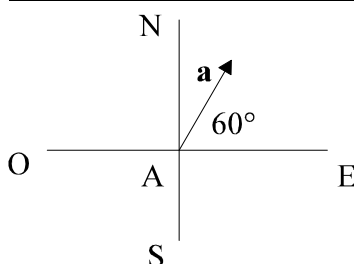


8. Costruire la somma dei seguenti vettori:

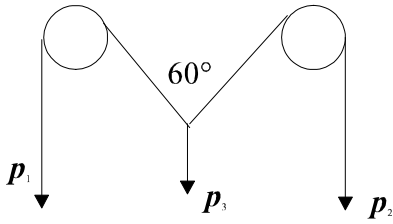


9. Completare la seguente tabella:

A	B	C	D	E	F	$[\vec{AB}] + [\vec{BC}] + [\vec{CD}]$	$[\vec{AB}] - [\vec{DE}]$	$[\vec{AB}] + [\vec{CD}] + [\vec{EF}]$
(1,2)	(0,3)	(-1,4)	(2,6)	(6,0)	(1,-4)			
(2,-5)	(-1,-1)	(-3,0)	(0,-1)	(8,-1)	(5,-2)			
(1,1)	(1,-1)	(0,1)	(-1,0)	(-1,-1)	(0,-1)			
(2,1)	(-1,-2)	(0,2)	(-2,0)	(3,7)	(0,1)			
(1,-3)	(2,0)	(-3,-3)	(8,0)	(0,1)	(-1,2)			



10. Un aereo viaggia a 220 km/h nella direzione \mathbf{a} segnata in figura. In A viene investito da un vento che soffia da est ad ovest con velocità costante di 50 km/h . Qual è la velocità risultante dell'aereo e la sua direzione?



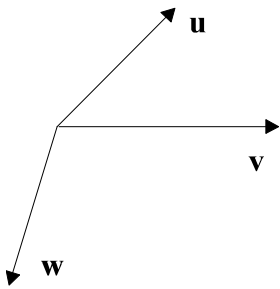
11. Che relazione deve intercorrere fra $|p_1|$, $|p_2|$ e $|p_3|$ perchè il corpo di peso p_3 resti in equilibrio nella posizione indicata in figura?

12. Determinare $3[\vec{OP}]$, $-\frac{1}{2}[\vec{OQ}]$, $-4[\vec{OR}]$, $\frac{1}{6}[\vec{OS}]$ ove sia:

- $P \equiv (-1, 2)$; $Q \equiv (0, 10)$; $R \equiv (6, 6)$; $S \equiv (24, 12)$;
- $P \equiv (1, 2)$; $Q \equiv (3, 1)$; $R \equiv (-6, 1)$; $S \equiv (12, 10)$;
- $P \equiv (-1, -2)$; $Q \equiv (3, -7)$; $R \equiv (-5, 1)$; $S \equiv (-4, 2)$;
- $P \equiv (-1, 0)$; $Q \equiv (2, 10)$; $R \equiv (8, -2)$; $S \equiv (3, 5)$.

13. Determinare $2[\vec{OP}] + [\vec{OQ}]$, $-2[\vec{OP}] + \frac{1}{2}[\vec{OQ}]$, $3[\vec{OP}] - 2[\vec{OQ}]$ ove P e Q siano:

- $P \equiv (1, 1)$, $Q \equiv (-3, 2)$;
- $P \equiv (1, 2)$, $Q \equiv (-2, -3)$;
- $P \equiv (3, 1)$, $Q \equiv (2, -3)$;
- $P \equiv (0, 1)$, $Q \equiv (-2, -3)$;
- $P \equiv (1, -1)$, $Q \equiv (-3, 2)$;
- $P \equiv (-1, 1)$, $Q \equiv (3, -2)$;
- $P \equiv (1, 0)$, $Q \equiv (3, 5)$;
- $P \equiv (1, 3)$, $Q \equiv (0, 2)$.



14. Costruire geometricamente i vettori:

- $2\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{w}$;
- $\frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v} + 2\mathbf{w}$;
- $4\mathbf{v} - \mathbf{u} - \mathbf{w}$;
- $2\mathbf{v} + \mathbf{u} + \frac{1}{3}\mathbf{w}$.

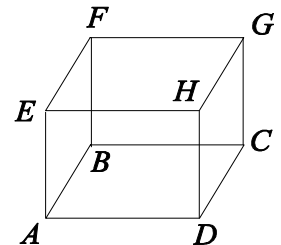
15. In un sistema cartesiano ortogonale siano $A \equiv (1, 0)$ e $B \equiv (2, 2\sqrt{3})$; si considerino i due vettori

$\mathbf{a} = [\vec{OA}]$ ove $\mathbf{b} = [\vec{OB}]$. Costruire $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{e} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{f} = 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$.

Considerati poi un punto $D \equiv (5, 0)$ ed un punto $C \equiv (7, 2\sqrt{3})$ esprimere come combinazione lineare di \mathbf{a} e \mathbf{b} i vettori $[\vec{BC}]$, $[\vec{AD}]$, $[\vec{AB}]$.

16. Considerato un parallelepipedo a base rettangolare $ABCDEFGH$ costruire i seguenti punti:

- P , dove $[\vec{AP}] = \frac{1}{2}([\vec{AB}] + [\vec{BC}] + [\vec{AG}])$;
- X , dove $[\vec{BX}] = [\vec{BH}] - [\vec{AE}]$;
- Q , dove $[\vec{FQ}] = [\vec{BD}] + \frac{2}{3}[\vec{FB}]$;
- Y , dove $[\vec{BY}] = [\vec{BA}] + [\vec{BC}] - [\vec{BF}]$.

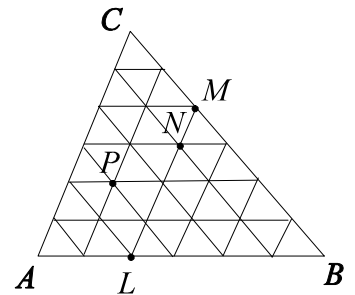


17. Considerare due rette r ed s complanari che si intersechino in un punto O in modo che uno degli angoli da esse formato sia di 60° , $[\vec{OA}]$ formi un angolo di 30° con r e sia $|\vec{OA}| = 4$.

22. Calcolare le componenti cartesiane del vettore \vec{AB} nei seguenti casi:
- $A \equiv (0, 0, 0)$, $B \equiv (-1, 3, -2)$;
 - $A \equiv (0, 0, 1)$, $B \equiv (-2, 3, 1)$;
 - $A \equiv (1, 0, 0)$, $B \equiv (-1, -1, -1)$;
 - $A \equiv (0, 1, 0)$, $B \equiv (0, 0, 2)$.

24. In un piano cartesiano siano $\vec{a} = [\vec{OA}]$, $\vec{b} = [\vec{OB}]$ e $\vec{c} = [\vec{OC}]$. Dato un triangolo ABC costruire graficamente i vettori: $\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$, $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)$, $\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}\right)$.

25. In un piano cartesiano siano $\vec{a} = [\vec{OA}]$, $\vec{b} = [\vec{OB}]$ e $\vec{c} = [\vec{OC}]$. Dato il triangolo ABC indicato in figura scrivere come combinazioni lineari di \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} i vettori: $[\vec{OL}]$, $[\vec{OM}]$, $[\vec{ON}]$, $[\vec{OP}]$.



26. In un sistema cartesiano in cui uno degli angoli formati dagli assi è di 60° considerare un vettore $[\vec{OA}]$ avente modulo 5 e l'angolo formato dal semiasse positivo delle ascisse con $[\vec{OA}]$ ha ampiezza 45° .

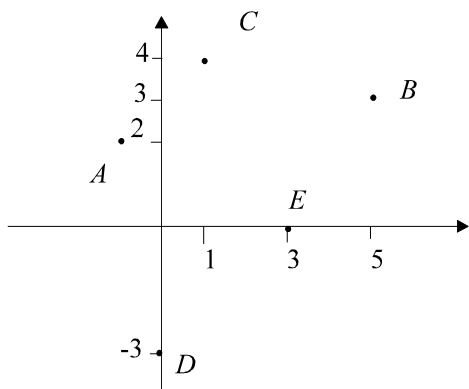
Determinare le coordinate di $[\vec{OA}]$ in questo riferimento.

Considerare poi un secondo sistema di riferimento avente lo stesso asse delle ascisse e asse delle ordinate passante per O e perpendicolare all'asse delle ascisse; determinare le coordinate di $[\vec{OA}]$ in questo riferimento.

27. Considerare un sistema cartesiano non ortogonale tale che uno degli angoli formati dagli assi abbia ampiezza α (pensiamo che sia quello limitato dai due semiasse positivi). Legare le componenti cartesiane di un vettore \vec{v} , che forma con il semiasse positivo delle ascisse un angolo β , ad α .
28. Dimostrare, utilizzando il prodotto scalare di vettori, che il triangolo inscritto in una semicirconferenza è retto.

29. Completare la seguente tabella:

$\ \vec{u}\ $	$\ \vec{v}\ $	α	β	coordinate cartesiane di $\vec{u} + \vec{v}$
2	4	30°	45°	
1	1	120°	60°	
3	1	90°	165°	
6	2	210°	30°	
8	4	30°	180°	
1	3	300°	220°	
2	4	35°	110°	
3	4	200°	30°	
1	1	60°	45°	



30. Facendo riferimento alla figura calcolare:

- $[\vec{OA}] \times [\vec{OB}]$;
 - $[\vec{OC}] \times [\vec{OD}]$;
 - $[\vec{AB}] \times [\vec{CD}]$;
 - $[\vec{OC}] \times [\vec{OB}]$;
 - $[\vec{OD}] \times [\vec{OE}]$;
 - $[\vec{BC}] \times [\vec{DE}]$;
- Determinare inoltre l'ampiezza di:
- \widehat{AOC} ;
 - \widehat{CEB} ;
 - \widehat{AOB} ;
 - \widehat{AOD} ;
 - \widehat{AED} ;
 - \widehat{AEB} .

31. In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale siano \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} i versori degli assi. Dati $[\vec{OA}] = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $[\vec{OB}] = 2\mathbf{k}$, $[\vec{OC}] = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $[\vec{OD}] = -2\mathbf{i} + \mathbf{k}$ esprimere in funzione dei versori $[\vec{AC}]$ e $[\vec{BD}]$ e calcolare $[\vec{AC}] \times [\vec{BD}]$. Esprimere poi nella forma $[r \cos \alpha, r \sin \alpha]$ i vettori $[\vec{OA}]$, $[\vec{OB}]$, $[\vec{OC}]$, $[\vec{OD}]$, $[\vec{AB}]$, $[\vec{BC}]$, $[\vec{CD}]$, $[\vec{AD}]$, $[\vec{AC}]$, $[\vec{BD}]$

32. Calcolare:

- $2(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (\mathbf{k} + \mathbf{i})$;
- $(\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \times (-\mathbf{j} + 2\mathbf{k} + \frac{1}{2}\mathbf{i})$;
- $2(3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \times (-\mathbf{k} + \mathbf{i})$;
- $(\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \times 8\mathbf{k}$;
- $((\mathbf{i} + \mathbf{j}) + (\mathbf{i} - \mathbf{j})) \times \mathbf{k}$;
- $(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times 2\mathbf{j}$;
- $((\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) \times (\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}))$;
- $(\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}) \times \mathbf{k} - \mathbf{i} \times (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$.

33. Dimostrare, utilizzando il prodotto scalare di vettori, il teorema del coseno.

34. Dato il triangolo ABC isoscele sulla base BC sia M il piede dell'altezza relativa alla base ed M_1 la sua proiezione ortogonale su AB , M_2 il punto medio di MM_1 . Provare che CM_1 e AM_2 risultano perpendicolari.

35. Dati $\mathbf{u} = [1, 0, -1]$ e $\mathbf{v} = [3, 1, 0]$ determinare \mathbf{w} tale che risulti:

- $\mathbf{w} \perp \mathbf{u}$;
- $\mathbf{w} \perp (\mathbf{u} + \mathbf{v})$;
- $2\mathbf{w} \perp (3\mathbf{u} - \mathbf{v})$;
- $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$;
- $\mathbf{w} \perp (\mathbf{u} - 2\mathbf{v})$;
- $-\mathbf{w} \perp (-2\mathbf{v} + 4\mathbf{u})$.

36. Dimostrare che se \mathbf{a} è perpendicolare a \mathbf{b} ed a \mathbf{c} allora \mathbf{a} risulta perpendicolare a qualsiasi vettore della forma $\mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}$, con μ e ν numeri reali.

37. Siano \mathbf{a} e \mathbf{b} due vettori diversi dal vettore nullo e sia $a = \|\mathbf{a}\|$ e $b = \|\mathbf{b}\|$, dimostrare che $\mathbf{c} = b\mathbf{a} + a\mathbf{b}$ biseca l'angolo formato da \mathbf{a} e da \mathbf{b} .

38. Esprimere il vettore $\mathbf{a} = [7, 3]$ come somma di un vettore \mathbf{c} , parallelo a $\mathbf{b} = [5, -12]$, e di un vettore \mathbf{d} , perpendicolare a \mathbf{c} .

39. Determinare una condizione necessaria e sufficiente perché $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|$.