

12 Trasformata di Laplace

La trasformata di Laplace è una trasformata di tipo integrale che opera su una funzione $f(x)$:

$$\mathcal{L}(f(x)) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} \cdot f(x) dx \quad s \in \mathbb{R}$$

ove s è un qualsiasi parametro reale.

La trasformata si rivela molto utile nella integrazione di alcuni tipi di equazioni differenziali e in parecchie applicazioni teoriche, come ad esempio la teoria dei segnali e, più in generale, in elettronica.

Vediamo ora come la trasformata di Laplace opera su alcune funzioni elementari che spesso ricorrono nelle applicazioni:

(1) **Trasformata di una funzione costante:** $f(x) = a$ ($a \in \mathbb{R}$).

$$\mathcal{L}(f(x)) = \int_0^{+\infty} a \cdot e^{-sx} dx = \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_0^h a \cdot e^{-sx} dx = \lim_{h \rightarrow +\infty} \left[-\frac{a}{s} e^{-sx} \right]_0^h = \lim_{h \rightarrow +\infty} \left(-\frac{a}{s} e^{-sh} \right) + \frac{a}{s} e^0$$

- se $s > 0$ $\mathcal{L}(f(x)) = \frac{a}{s}$ e quindi converge
- se $s < 0$ $\mathcal{L}(f(x))$ diverge a $+\infty$.

(2) **Trasformata di un esponenziale:** $f(x) = e^{\alpha x}$ $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}(f(x)) = \int_0^{+\infty} e^{\alpha x} e^{-sx} dx = \int_0^{+\infty} e^{x(\alpha-s)} dx = \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_0^h e^{-x(s-\alpha)} dx = \lim_{h \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-x(s-\alpha)}}{-(s-\alpha)} \right]_0^h = \lim_{h \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-h(s-\alpha)}}{-(s-\alpha)} \right) + \frac{1}{(s-\alpha)}$$

- se $s > \alpha$ $\mathcal{L}(f(x)) = \frac{1}{s-\alpha}$ e quindi converge
- se $s < \alpha$ $\mathcal{L}(f(x))$ diverge a $+\infty$.

La seguente tabella mostra alcune trasformate di Laplace per funzioni elementari:

$f(x)$	$\mathcal{L}(f(x))$
$\sin \alpha x$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)	$\frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$; $s > 0$
$\cos \alpha x$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)	$\frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$; $s > 0$
$k \in \mathbb{R}$, costante	$\frac{k}{s}$; $s > 0$
$e^{\alpha x}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)	$\frac{1}{s-\alpha}$; $s > \alpha$
x^n ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$; $s > 0$

e risulta molto utile in parecchie questioni che coinvolgono l'uso della trasformata.

Osservazione: La trasformata di Laplace gode delle seguenti proprietà:

1) Se $g(x)$ e $f(x)$ sono due funzioni si ha:

$$\mathcal{L}(f(x) + g(x)) = \int_0^{+\infty} (f(x) + g(x))e^{-sx} dx \quad \text{(linearità)}$$

per la linearità dell'operatore integrale si perviene a:

$$\int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx} dx + \int_0^{+\infty} g(x)e^{-sx} dx = \mathcal{L}(f(x)) + \mathcal{L}(g(x))$$

Pertanto la trasformata di Laplace **conserva la somma di funzioni**.

$$\mathcal{L}(f(x) + g(x)) = \mathcal{L}(f(x)) + \mathcal{L}(g(x))$$

2) Sia $f(x)$ una funzione e a una costante reale:

$$\mathcal{L}(af(x)) = \int_0^{+\infty} af(x)e^{-sx} dx = a \int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx} dx = a\mathcal{L}(f(x))$$

Le due proprietà precedenti affermano che la trasformata di Laplace **opera linearmente sulla combinazione lineare di funzioni**.

Vediamo ora come la trasformata di Laplace opera sulle derivate di una generica funzione $y(x)$.

Calcolo di $\mathcal{L}(y'(x))$

Per definizione si ha:

$$\mathcal{L}(y'(x)) = \int_0^{+\infty} y'(x)e^{-sx} dx$$

Innanzitutto calcoliamo l'integrale indefinito usando il metodo di integrazione per parti:

$$\int y'(x)e^{-sx} dx = e^{-sx} y(x) + s \int y(x)e^{-sx} dx$$

Osservando che :

$$\int y(x)e^{-sx} dx = \mathcal{L}(y(x))$$

se la funzione $y(x)$ è tale che : $\lim_{h \rightarrow +\infty} y(h)e^{-sh} = 0$ si ottiene :

$$\mathcal{L}(y'(x)) = \lim_{h \rightarrow +\infty} (y(h)e^{-sh}) - y(0) + s\mathcal{L}(y(x)) = s\mathcal{L}(y(x)) - y(0)$$

Calcolo di $\mathcal{L}(y''(x))$

Utilizzando la relazione appena trovata e ponendo $y'(x) = u(x)$ si ottiene

$$\mathcal{L}(u'(x)) = s\mathcal{L}(u(x)) - u(0)$$

Essendo $u'(x) = y''(x)$ risulta

$$\mathcal{L}(y''(x)) = \mathcal{L}(u'(x)) = s\mathcal{L}(u(x)) - u(0)$$

Tenendo conto del valore ricavato in precedenza di $\mathcal{L}(y'(x))$, si ottiene:

$$\mathcal{L}(y''(x)) = s\mathcal{L}(y'(x)) - y'(0) = s^2\mathcal{L}(y(x)) - sy(0) - y'(0)$$

Con tecnica analoga si possono calcolare anche le derivate successive.

Esempio: Integrazione di un'equazione differenziale lineare e non omogenea. Determinare l'integrale che soddisfa al seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

1) **Primo metodo** (già visto precedentemente):

L'equazione omogenea associata è : $y''(x) + y(x) = 0$

la cui equazione caratteristica è : $p^2 + 1 = 0$ che ha come soluzioni $p = \pm i$.

La soluzione generale dell'equazione omogenea è:

$$y(x) = A \cos x + B \sin x$$

La soluzione particolare dell'equazione non omogenea va cercata tra le funzioni del tipo:

$$u(x) = ax + b, (a, b \in \mathbb{R});$$

Risulta

$$u'(x) = a \text{ e } u''(x) = 0.$$

Sostituendo nell'equazione di partenza si ottiene:

$$ax + b = x$$

per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

La soluzione generale della equazione data è

$$y(x) = A \cos x + B \sin x + x$$

per trovare la soluzione al problema di Cauchy calcoliamo:

$$y'(x) = -A \sin x + B \cos x + 1$$

$$y(0) = A \cos 0 + B \sin 0 + 0 = 0$$

$$y'(0) = -A \sin 0 + B \cos 0 + 1 = 2$$

quindi

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$

dunque la soluzione che soddisfa al problema di Cauchy è:

$$y(x) = \sin x + x$$

2) **Secondo metodo mediante la trasformata di Laplace**

Se due funzioni sono uguali, anche le loro trasformate di Laplace saranno uguali. Applicando tale proprietà ad ambo i membri dell'equazione differenziale $y'' + y = x$ si perviene, tenendo conto della proprietà di linearità, a:

$$\begin{cases} \mathcal{L}(y''(x) + y(x)) = \mathcal{L}(y''(x)) + \mathcal{L}(y(x)) = \mathcal{L}(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Sapendo che

$$\mathcal{L}(y''(x)) = s^2 \mathcal{L}(y(x)) - sy(0) - y'(0)$$

per le condizioni iniziali risulta:

$$\mathcal{L}(y''(x)) = s^2 \mathcal{L}(y(x)) - s \cdot 0 - 2 = s^2 \mathcal{L}(y(x)) - 2$$

da cui,

$$s^2 \mathcal{L}(y(x)) - 2 + \mathcal{L}(y(x)) = \mathcal{L}(x)$$

Sapendo che: $\mathcal{L}(x) = \frac{1}{s^2}$ e $\mathcal{L}(x^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ si ricava:

$$(s^2 + 1)\mathcal{L}(y(x)) - 2 = \frac{1}{s^2}$$

e quindi

$$\mathcal{L}(y(x)) = \frac{1 + 2s^2}{s^2(s^2 + 1)} = \frac{1 + s^2 + s^2}{s^2(s^2 + 1)} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{1 + s^2}$$

Consultando la tabella precedente sappiamo che

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{s^2} \quad \mathcal{L}(\text{sen } x) = \frac{1}{1 + s^2} \quad \mathcal{L}(\text{sen } \alpha x) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + s^2} \quad (s > 0)$$

per la proprietà di linearità è:

$$\mathcal{L}(y(x)) = \mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(\text{sen } x) = \mathcal{L}(x + \text{sen } x)$$

da cui:

$$y(x) = \text{sen } x + x$$

che coincide con il risultato precedente.

Osservazione: si osservi che se si usa la trasformata di Laplace, le condizioni iniziali vengono utilizzate durante il procedimento, mentre nel calcolo classico prima si calcola l'integrale generale e poi si impongono le condizioni di Cauchy.

Quale dei due metodi sia più conveniente dipende dalla natura del problema.